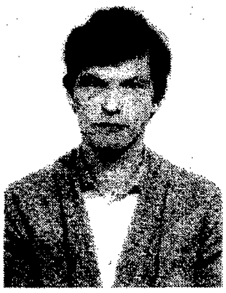
М. С. Гладченко

ПРОСТЫЕ МЕХАНИЗМЫ



Гладченко Михаил Савельевич, кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической и экспериментальной физики Ярославского педагогического университета

Предысторией появления этой статьи послужило то, что в руки автору попала старая книга по теоретической механике В.Я.Гебеля "Основной курс теоретической механики" [1]. Не знаю, доводилось ли вам, уважаемые читатели, испытывать искреннее восхищение тем, как написаны и оформлены старые книги по физике (и наверное, не только по физике), но именно чувство огромного удовольствия не покидало меня, пока я сначала просто пролистывал эту книгу, а затем и вчитывался в нее. Предельно ясные и четкие рассуждения, хотя иногда и достаточно пространные, помимо своей прямой цели — донести до читателя суть рассматриваемого предмета, преследуют и другую цель — воспитать уважение к изучаемой науке, стимулировать собственные мысли и рассуждения.

Особый интерес в курсе механики В.Я.Гебеля вызвал раздел, посвященный простым механизмам и машинам. В первую очередь это было, наверное, связано с тем, что со школьной скамьи у автора сохранилось незабываемое впечатление от известной крылатой фразы Архимеда о "гигантских" возможностях обыкновенного на вид рычага, способного перевернуть ни много ни мало, а весь земной шар. Во-вторых, не менее интересным оказалось в этой книге то, что, как правило, не находит детального рассмотрения в стандартном подходе к изучению этих вопросов (например, влияние трения и жесткости веревок). Кроме всего прочего, как известно, в школьном курсе физики (7 класс) [2] лишь упоминается о таких простых механизмах , как ворот, винт и др. Ограничиваются рассмотрением рычагов и их видоизменений — блоков (причем некоторых частных случаев). Приятным исключением в этом отношениии является пробный учебник для общеобразовательных школ М.М.Балашова "Физика-7" [3], где материал, посвященный простым механизмам и машинам, рассматривается достаточно полно. Причины указанного понятны — нехватка времени, отсутствие соответствующей математической подготовки учащихся и др. Тем не менее, впоследствии к ним уже, как правило, не возвращаются. Наверное, это все-таки упущение, хотя бы просто потому, что простые механизмы сыграли огромную роль в истории человечества [4]. Уверен, что более детальное рассмотрение этих вопросов могло бы вызвать интерес школьников и возможно, стимулировать их самостоятельные исследования.

В планы автора входит подготовка 2-3 статей, посвященных механике простых механизмов и машин. Свою задачу я вижу в адаптации и методической обработке материала. Что касается его использования в школе, то, на мой взгляд, это было бы наиболее целесообразно на факультативных занятиях по физике в 10 или 11 классах либо в классах с углубленным изучением физики. В статье, которую вы сейчас читаете, я планирую коснуться механики блоков, а в следующих — клина, винта и может быть собственно рычага. Хочется предложить в дополнение и ряд интересных задач, которые можно обсудить с учениками. Очень надеюсь, уважаемые учителя, на обратную связь — ваши интересные и оригинальные задачи можно было бы органично включить в теоретический материал.

Итак, прежде чем перейти непосредственно к механике блоков, рассмотрим предварительно влияние веревок (тросов), являющихся неотъемлемой частью упомянутых простых механизмов.

1.Жесткость веревок

Допустим, что вертикальной силой **f** необходимо поднять груз весом **P** при помощи веревки, перекинутой через неподвижный блок (см. рис.1).

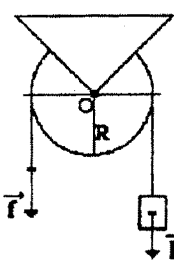


Рис.1

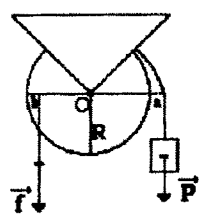


Рис.2

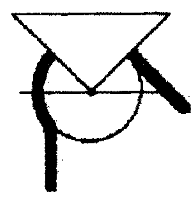


Рис.3

В стандартном подходе к этой задаче считается, что веревка является абсолютно гибкой, так что начальная и конечные точки ее касания совпадают с концами горизонтального диаметра блока, как это изображено на рис.1. Естественно, что в этом случае уравнение моментов сил относительно оси вращения (т.О), проходящей через центр блока, выглядит следующим образом

$$\mathbf{P \cdot R = f \cdot R}\,, \qquad (1)$$

где **R** — радиус блока. Другими словами, неподвижный блок не дает выигрыша в силе ($P/f = 1$) — приложенная сила равна весу груза.

В действительности требуется дополнительно учитывать с одной стороны как силы трения в оси блока, так и жесткость самой веревки (троса). Посмотрим, к чему приведет учет жесткости. Очевидно, что в этом случае набегающая и сбегающая части веревки (троса) касаются блока не точно в концах диаметра (см. рис. 2). Набегающая часть — несколько выше, а сбегающая часть — несколько ниже. Наиболее отчетливо это можно представить, если рассмотреть достаточно толстый проволочный канат (см. схематический рис. 3).

Ясно, что в этом случае плечо силы **P** несколько увеличивается, а плечо силы **f** немного уменьшается. Обозначим через **a** и **b** соответственно увеличение и уменьшение плеч сил **P** и **f**. Тогда уравнение (1) нужно скорректировать —

$$\mathbf{P}\cdot(\mathbf{R} + \mathbf{a}) = \mathbf{f}\cdot(\mathbf{R} - \mathbf{b}). \qquad (2)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{f} = \mathbf{P}\cdot[1 + (\mathbf{a} + \mathbf{b})/(\mathbf{R} - \mathbf{b})]. \qquad (3)$$

Член $\mathbf{P}\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b})/(\mathbf{R} - \mathbf{b})$ показывает, насколько следует увеличить прикладываемую силу для поддержания или равномерного поднятия груза веса **P**. Это слагаемое и представляет то дополнительное сопротивление, которое возникает вследствие жесткости веревки. Обозначим его **S**.

В.Я.Гебель упоминает соответствующие исследования, которые показали, что это дополнительное сопротивление представляет собой достаточно сложную величину, зависящую от многих обстоятельств. Так, жесткость новой веревки больше, чем старой, а мокрой или смоленой больше, чем сухой и несмоленой. Согласно исследованиям кручения нитей *Ш.О.Кулона* (1736-1806), занимавшегося не только вопросами электро- и магнитостатики [5], жесткость может быть выражена следующей эмпирической формулой

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{P})/\mathbf{D}, \qquad (4)$$

где **D** — диаметр блока, увеличенный на диаметр веревки, **A** и **B** — численные коэффициенты, зависящие от диаметра веревки, числа ее прядей и давности. Согласно исследованию *Прони* $\mathbf{A} = 4{,}9\cdot\mathbf{d}^{\mathbf{k}}$ и $\mathbf{B} = 0{,}106\cdot\mathbf{d}^{\mathbf{k}}$, где **d** — диаметр веревки. Причем $\mathbf{k} = 1{,}7$ для новых веревок и $\mathbf{k} = 1{,}4$ — для старых. Можно пользоваться и одночленными формулами *Редтенбахера*

$$\mathbf{S} = 13\cdot\mathbf{d}^2\cdot\mathbf{P}/\mathbf{R}\ (\text{кг})$$

— для веревок, и (5)

$$\mathbf{S} = 26\cdot\mathbf{d}^2\cdot\mathbf{P}/\mathbf{R}\ (\text{кг})$$

— для проволочных канатов. В выражениях (5) **d** — диаметр веревки и **R** — радиус блока.

2. Неподвижный блок

Учтем рассмотренную выше жесткость веревки и трение в оси неподвижного блока. Тогда уравнение моментов сил (с учетом соответствующих знаков) можно записать в следующем виде (см. рис. 4)

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{R} - \mathbf{P}\cdot\mathbf{R} - \mathbf{S}\cdot\mathbf{R} - \mu\mathbf{N}\cdot\mathbf{r} = 0, \qquad (6)$$

где **R** и **r** — соответственно радиусы блока и его оси, μ — коэффициент трения скольжения оси блока по отношению к гнездам обоймицы, в которой он вращается; $|\mathbf{N}|$ — нормальное давление блока на ось. Итак, действительная величина силы **f** оказывается большей, чем P на величину $\mathbf{P} + \mathbf{S} + \mu\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}/\mathbf{R}$.

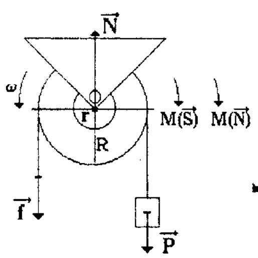


Рис.4

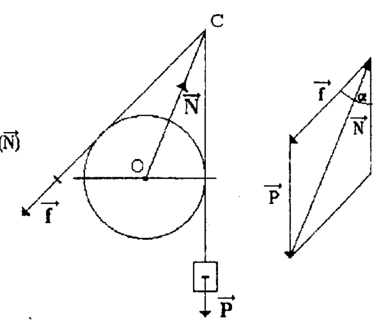


Рис.5

Модуль **N** можно определить, исходя из следующих соображений. При параллельных веревках (см. рис.4) $\mathbf{N} = \mathbf{P} + \mathbf{f}$ (приблизительно $= 2\cdot\mathbf{P}$), а при непараллельных веревках (см. рис. 5) $\mathbf{N} = \mathbf{P}^2 + \mathbf{f}^2 + 2\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{f}\cdot\cos\alpha$, или, полагая приближенно $\mathbf{f} = \mathbf{P}$, получим, что

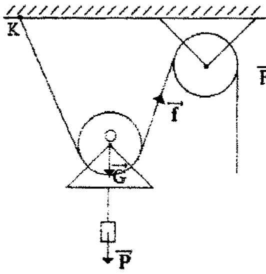
$$\mathbf{N} = 2\cdot\mathbf{P}^2(1 + \cos\alpha) = 2\cdot\mathbf{P}\cdot\cos(\alpha/2)\,, \qquad (7)$$

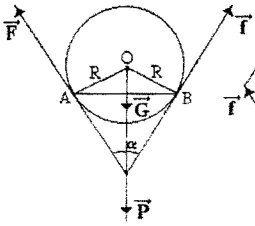
где α — угол, образуемый ветвями веревки.

Вследствие трения в оси и жесткости веревки приложенная сила **f** оказывается на 15%-20% больше веса перемещаемого груза **P**, причем около 2/3 этого сопротивления приходится на долю от жесткости веревки.

3. Подвижный блок

В подвижном блоке (см. рис. 6) груз весом **P** подвешивается к крюку обращенной вниз обоймицы; сам же блок висит на веревке, один конец которой закреплен (на рис. 6 в точке К), а второй конец чаще всего перекидывается через неподвижный блок. Ко второму концу прикладывается сила **f**.





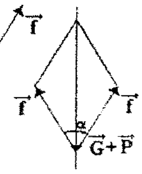


Рис.6 **Рис.7** **Рис.8**

Рассмотрим сначала общий случай равновесия блока, когда ветви обхватывающей его веревки образуют между собой некоторый угол α (см. рис.7). Обозначим натяжение укрепленной части веревки через **F**. Записывая уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр подвижного блока (точку О), имеем

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{R} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{R} = 0, \text{ а следовательно } \mathbf{f} = \mathbf{F} \quad (8)$$

Итак, натяжение обеих ветвей веревки одинаково. В выражении (8) учтено, что момент силы **P** относительно рассматриваемой оси равен нулю, поскольку линия действия силы пересекает ось (плечо силы равно нулю).

Сложим (см. рис 8) эти равные силы по правилу параллелограмма (обращающегося в этом случае в ромб). Равнодействующая сил делит угол α и хорду **AB** пополам. Она оказывается равной $2\cdot\mathbf{f}^2(1 + \cos\alpha) = 2\cdot\mathbf{f}\cdot\cos(\alpha/2)$. Так как эта сила по направлению прямо противоположна геометрической сумме **P** и **G** (**G** — вес самого подвижного блока), то в соответствии со вторым уравнение условий равновесия (геометрическая сумма сил должна обращаться в нуль) имеем

$$2\cdot\mathbf{f}\cdot\cos(\alpha/2) = \mathbf{P}+\mathbf{G}, \text{ или } \mathbf{f} = 1/2*(\mathbf{P}+\mathbf{G})/\cos(\alpha/2) \quad (9)$$

В частном случае параллельных ветвей $\alpha = 0$ и

$$\mathbf{f} = (\mathbf{P}+\mathbf{G})/2. \quad (10)$$

Другими словами, приложенная сила вдвое меньше веса поднимаемого груза (если не учитывать вес самого подвижного блока).

Выражению (9) можно придать несколько иной вид. Заметим, что угол **OAB** = $\alpha/2$, а следовательно $\cos(\alpha/2)=1/2\cdot\mathbf{AB}/\mathbf{R}$, где **R** — радиус блока. Тогда

$$\mathbf{f} = (\mathbf{P} + \mathbf{G})\cdot\mathbf{R}/\mathbf{AB}. \quad (11)$$

Итак, в подвижном блоке приложенная сила относится к общему весу поднимаемого груза и блока как радиус блока относится к хорде дуги, охватываемой веревкой. Очевидно, что при одном и том же радиусе блока больший выигрыш в силе можно получить в случае, если веревки параллельны.

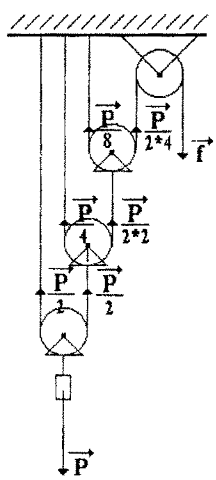
Дополнительные сопротивления от трения и жесткости веревок в подвижном блоке оказываются меньшими, чем в блоке неподвижном — около 10% веса поднимаемого груза и самого блока.

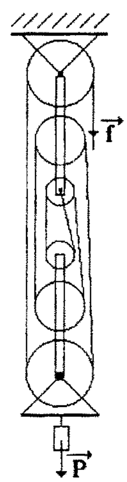
4. Полиспасты

Разновидностью блоков являются полиспасты (тали), каждый из которых представляет собой систему из нескольких подвижных блоков, соединенных с одним или несколькими неподвижными блоками. Рассмотрим некоторые типы полиспастов.

4.1. Полиспаст Архимеда (степенной полиспаст)

Этот полиспаст состоит из нескольких (на рис. 9 из трех) подвижных и одного неподвижного блока. Каждый подвижный блок поддерживается отдельной веревкой, один конец которой укреплен неподвижно, а второй подвешен к крюку обоймицы следующего верхнего блока. Свободный конец веревки самого верхнего подвижного блока перекинут через неподвижный блок — к нему приложена сила **f**. Поднимаемый груз весом **P** подвешен к крюку самого нижнего блока.





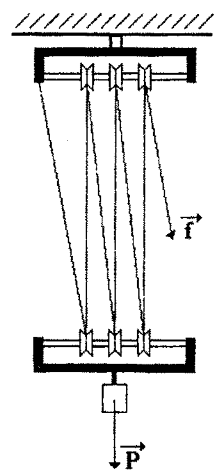


Рис.9 **Рис.10** **Рис.11**

Если пренебречь весом блоков и влиянием вредных сопротивлений, то величина силы **f** определяется следующим образом. Считаем для простоты ветви параллельными. Согласно выражению (10) находим, что натяжение части веревки , привязанной к крюку обоймицы 2-го снизу блока, равно $\mathbf{P}/2$. Натяжение части веревки, привязанной к 3-му снизу блоку, — $\mathbf{P}/(2\cdot2)=\mathbf{P}/2^2$. Тогда натяжение свободного конца веревки равно $\mathbf{P}/(2^2\cdot2)=\mathbf{P}/2^3$. Очевидно, если требуется обобщить полученную зависимость на n подвижных блоков, то мы получим

$$\mathbf{f}=\mathbf{P}/2^n. \qquad (12)$$

4.2 Полиспаст, изображенный на рис.10, представляет соединение трех подвижных и трех неподвижных блоков. Груз **P** подвешивается к крюку нижней обоймицы, заключающей подвижные блоки. Верхняя обоймица с неподвижными блоками подвешивается к неподвижному крюку. Веревка прикреплена к верхней обоймице и по очереди охватывает все блоки так, что число ветвей ее вдвое больше числа подвижных блоков. На свободный конец веревки действует сила **f**.

Так как груз **P** уравновешивается натяжением всех шести ветвей веревки и так как они одинаково натянуты, то для свободного конца имеем $\mathbf{P}/6=\mathbf{P}/(2\cdot3)$. Итак, для равновесия в этом полиспасте необходимо и достаточно, чтобы сила $\mathbf{f}=\mathbf{P}/(2\cdot3)$. Очевидно, что при n подвижных блоках

$$\mathbf{f}=\mathbf{P}/(2\cdot n). \qquad (13)$$

Итак, для удержания в равновесии груза весом **P** при помощи рассматриваемого полиспаста прикладываемая сила должна быть равна весу груза, поделенному на удвоенное количество подвижных блоков.

Полиспаст, изображенный на рис.11, отличается от предыдущего лишь тем, что все подвижные блоки посажены на одну общую ось в одной коробке точно так же, как и неподвижные. Очевидно, что отношение приложенной силы **f** к весу груза **P** останется тем же, то есть будет определяться выражением (13).

В полиспастах влияние вредных сопротивлений, которые не брались в расчет при получении соответствующих выражений, очень велико. Оно может доходить до 1/2 поднимаемого груза и даже более. Именно поэтому в двух последних полиспастах не ставят более трех пар блоков.

Задачи

1. В системе, состоящей из неподвижного и подвижного блоков, грузы массами $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, висящие на блоках, находятся в равновесии, когда нити параллельны (см. рис.12). Что произойдет, если точку закрепления нити **A** передвигать вправо? Массами блоков и всеми вредными сопротивлениями пренебречь [6].

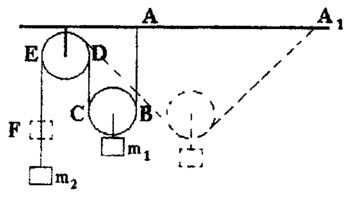


Рис.12

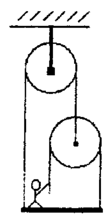


Рис.13

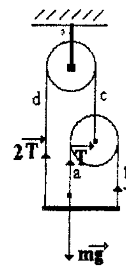


Рис.14

Решение:

Когда участки нити **AB**, **CD** и **EF** параллельны, то при равновесии сила натяжения нити должна быть равна половине силы тяжести груза массы $\mathbf{m}_1$, и, следовательно, масса груза $\mathbf{m}_2$ должна быть вдвое меньше массы $\mathbf{m}_1$. Если затем точка закрепления нити перемещается вправо в точку $\mathbf{A}_1$, то соответствующие участки нити уже не параллельны и при силе натяжения, равной половине силы тяжести груза $\mathbf{m}_1$, нити уже не смогут удержать блок с грузом $\mathbf{m}_1$ (см. выражение (9). Следовательно, равновесие нарушается, груз $\mathbf{m}_1$ опускается , а груз $\mathbf{m}_2$ поднимается.

2. С какой силой человек, стоящий на доске должен тянуть веревку за конец **a**, чтобы удержать доску в равновесии, если масса человека **m** (см. рис. 13). Массами доски , блока , веревки и вредными сопротивлениями пренебречь [6].

Решение:

Пусть человек тянет за веревку **a** с такой силой, что натяжение веревки в ветви **a** — это некоторое **T** (см. рис. 14). Тогда сила натяжения веревки **b** тоже будет равна **T**. Сила натяжения веревки **c** уравновешивает совокупное действие двух параллельных сил **T** и **T**, следовательно.она равна $2\cdot\mathbf{T}$. Такова же должна быть и сила натяжения веревки **d**, являющейся продолжением веревки **c**, то есть она должна быть равна $2\cdot\mathbf{T}$. Доска висит на двух веревках **b** и **d** (веревка **a** не прикреплена к доске, а потому не поддерживает ее).Равнодействующая этих параллельных сил равна $3\cdot\mathbf{T}$. Кроме этой силы, направленной вверх, на доску действует сила $\mathbf{mg}-\mathbf{T}$, где $\mathbf{mg}$ — сила давления человека на доску, **T** — сила натяжения веревки **a**. Так как доска находится в равновесии, сумма всех сил , действующих на доску, равна 0:

$$\mathbf{mg}-\mathbf{T}-3\cdot\mathbf{T}=0,\ \mathbf{T}=\mathbf{mg}/4$$

3. Два одинаковых металлических конуса подвешены на нити, переброшенной через неподвижный блок, и погружены в жидкость. Конусы находятся в состоянии равновесия так, как это изображено на рис.15. Как будет вести себя эта система тел, если уровень жидкости будет медленно опускаться? Массой блока, веревок пренебречь.

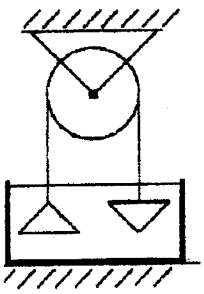


Рис.15

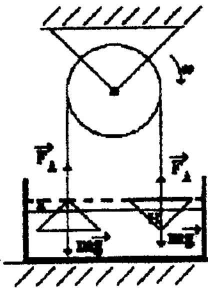


Рис. 16

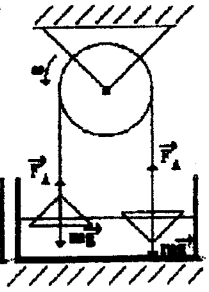


Рис.17

Решение: Предположим, что уровень жидкости понизился на некоторую величину **h** от линии, на которой первоначально находилась вершина левого конуса и основание правого (см.рис.16). Тогда на левый конус будет действовать большая выталкивающая сила, чем на правый (больше объем погруженной части). Это приведет к тому, что блок начнет вращаться по часовой стрелке до тех пор, пока архимедовы силы справа и слева не уравновесят друг друга. Очевидно, что при этом над водой окажется еще некоторый дополнительный объем слева, а под воду уйдет некоторый объем справа. Вращение блока по часовой стрелке при истечении воды будет продолжаться до некоторых пор. С какого-то момента начнется обратное вращение блока против часовой стрелки (см. рис.17), которое объясняется аналогично описанному выше. Оба конуса “выйдут из воды” одновременно и будут находиться в состоянии равновесия в том же виде, как и в жидкости, т.е. вершина левого и основание правого будут находиться на одном уровне.

Литература

[1] *Гебель В.Я.* Основной курс теоретической механики. Часть 2-я. М.: Государственное издательство, 1922.

[2] *Перышкин А.В.* Физика, 7-8 класс. М.: Просвещение, 1993.

[3] *Балашов М.М.* Физика-7. М.: Просвещение, 1994.

[4] *Боголюбов А.Н.* Механика в истории человечества. М.: Наука, 1978.

[5] *Храмов Ю.А.* Физики (биографический справочник). Изд. второе. М.:Наука, 1983.

[6] *Шаскольская М.П., Эльцын И.А.* Сборник избранных задач по физике. Изд. пятое. М.:Наука, 1986.