Е.Р. Матвеев

Всплески и фундаментальные сплайны

Матвеев Евгений Рафаилович, старший преподаватель кафедры математического анализа ЯГПУ, кандидат физико-математических наук

1.Введение. В последнее время широкое распространение получила тематика, связанная с построением базисов из всплесков (см. например [1]-[4]). Это связано с их применением в различных разделах математики и смежных областях. К настоящему времени существуют различные подходы к определению всплесков. Наши исследования связаны с первоначальным определением их как системы функций
$\{\Psi(2^n x - k)\}, k, n \in Z$, порожденной сдвигами и сжатиями единственной функции $\Psi(x)$. При соответствующем выборе функции $\Psi(x)$ порождаемое ей семейство полно и образует ортогональный базис в $L_2(R)$.

Среди методов построения функции $\Psi(x)$ к тематике нашей работы, на наш взгляд, близки два. Первый метод - multiresolution approximations - придуман в [2] и обобщен в [1]. Этот метод основан на идеях гармонического анализа. Второй метод предложен в [4]; в его основе лежат идеи дискретной обработки сигналов. С другой стороны, тематика работы примыкает к исследованиям авторов в [1] - [5], где изучались вопросы построения сплайн-базисов методом ортогонализации Грамма-Шмидта.

Идея, которая послужила толчком к исследованиям настоящей работы, была отмечена в [1], где автор заметил, что возможно осуществить непосредственное построение всплесков методом ортогонализации Грамма-Шмидта. Реализации этого метода и посвящена настоящая работа.

По мнению автора, представляет интерес и связь, обнаруженная между ортогонализацией линейных B-сплайнов и фундаментальными кубическими сплайнами. До настоящего времени автор не встречал разложения фундаментальных сплайнов по базису из B-сплайнов. Этому посвящен третий раздел работы.

2. Построение всплесков. Пусть $B(x)$ кусочно-линейная функция, определяемая формулой

$$B(x) = \begin{cases} 0, |x| \ge 1; \\ x + 1, -1 \le x \le 0; \\ -x + 1, 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Положим $\omega = 2 - \sqrt{3}$ и обозначим через $\Phi(x)$ сумму ряда

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega^k B(x + k) \qquad (1)$$

Для пары измеримых функций $f, g: R \to R$
определим скалярное произведение

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx\,.$$

Будем говорить, что f и g ортогональны, если $(f,g)=0$.

Пусть, далее, числа $\{\gamma_k\}, k\in Z$, обозначают

$$\gamma_k=0,k\geq 2;\gamma_1=\frac{1}{2};\gamma_0=1+\frac{\omega}{2};\gamma_{-1}=\frac{1+\omega}{2};$$

$$\gamma_{-2n-1}=\gamma_{-2n}=(-1)^n\omega^n\frac{1+\omega}{2},n\in N.$$

Если при этом $\Psi(x)$ есть сумма ряда

$$\Psi(x)=\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\gamma_{1-k}\Phi(2x-k),$$

то справедлива

Теорема. Функции $\{\Psi(2^n x-k)\}$, $k,n\in Z$, попарно ортогональны.

Доказательство. Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. Функции $\{\Phi(x-k)\}, k\in Z$, попарно ортогональны.

Доказательство. Обозначим $B_k(x)=B(x+k)$; для каждого $n\in N$ определим $n+1$ функцию $\Phi_0,\ldots,\Phi_n$

$$\Phi_j(x)=\sum_{k=0}^{j}c_{j,k}B_k(x),0\leq j\leq n,$$

где $c_{j,k},0\leq j\leq n,0\leq k\leq j,$ произвольные действительные числа (здесь $c_{j,j}=1$). Подберем коэффициенты $c_{j,k},0\leq j\leq n,0\leq k\leq j,$ так, чтобы все функции $\Phi_j,0\leq j\leq n-1,$ были ортогональны последней функции Φ_n. Запишем последнее условие в виде

$$(\Phi_n,\Phi_j)=0,0\leq j\leq n-1. \qquad (2)$$

Так как (2) равно

$$\left(\sum_{i=0}^{n}c_{n,i}B_i\sum_{k=0}^{j}c_{j,k}B_k\right)=\sum_{i=0}^{n}c_{n,i}\sum_{k=0}^{j}c_{j,k}(B_i,B_k),$$

то условие (2) для вычисления коэффициентов $\{c_{n,i}\},0\leq i\leq n-1,$ можно записать в виде системы линейных уравнений

$$A_n c_n=b_n. \qquad (3)$$

Здесь через A_n мы обозначили матрицу размерности $n\times n$ $A_n=\{a_{ji}\},0\leq j,i\leq n-1$,

$$a_{ji}=\sum_{k=0}^{j}c_{j,k}(B_i,B_k),0\leq i,j\leq n-1,$$

а через b_n и c_n $n-$ мерные вектора

$$b_n=\left(-\sum_{k=0}^{j}c_{j,k}(B_n,B_k),0\leq j\leq n-1,\right)$$

и

$$c_n=(c_{n,0},c_{n,1},\ldots,c_{n,n-1}).$$

Обозначим через $A_{n,n-i},1\leq i\leq n$, семейство матриц размерности $n\times n$, образованных из матрицы A_n заменой строк с $n-i$ по $n-1,1\leq i\leq n$, на строки

$$\begin{matrix}(B_{n-i},B_0) & (B_{n-i},B_1) & \cdots & (B_{n-i},B_{n-1})\\ . & . & . & .\\ (B_{n-2},B_0) & (B_{n-2},B_1) & \cdots & (B_{n-2},B_{n-1})\\ (B_{n-1},B_0) & (B_{n-1},B_1) & \cdot & (B_{n-1},B_{n-1})\end{matrix}$$

Легко видеть, что при $i=n$ матрица $A_{n,0}$ есть матрица Грамма G_n

$$G_n = \begin{pmatrix} (B_0, B_0) & (B_0, B_1) & \cdots & (B_0, B_{n-1}) \\ . & . & . & . \\ (B_{n-2}, B_0) & (B_{n-2}, B_1) & \cdots & (B_{n-2}, B_{n-1}) \\ (B_{n-1}, B_0) & (B_{n-1}, B_1) & \cdot & (B_{n-1}, B_{n-1}) \end{pmatrix}$$

по системе функций $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$.

Вычислим определитель $\det A_n$ матрицы A_n. Каждый элемент последней строки определителя $\det A_n$ равен.

$$a_{n-1,s} = \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1,k}(B_k, B_s), 0 \le s \le n-1.$$

Представим $\det A_n$ в виде линейной комбинации $n-1$ определителя первого уровня с коэффициентами $\{c_{n-1,k}\}, 0 \le k \le n-1$; так как $c_{n-1,n-1} = 1$, то последним определителем в этой линейной комбинации будет определитель

$\det A_{n,n-1}$.

В каждом из полученных определителей первого уровня элементы предпоследней строки равны

$$a_{n-2,s} = \sum_{k=0}^{n-2} c_{n-2,k}(B_k, B_s), 0 \le s \le n-2.$$

Представим каждый определитель первого уровня в виде линейной комбинации определителей второго уровня с коэффициентами $\{c_{n-2,k}\}, 0 \le k \le n-2$; так как $c_{n-2,n-2} = 1$, то последним определителем в этой линейной комбинации будет определитель $\det A_{n,n-2}$. В силу равенства двух последних строк все определители второго уровня кроме $\det A_{n,n-2}$ будут равны нулю.

Продолжая раскладывать определители

$\det A_{n,n-i}, 1 \le i \le n$, через n шагов получим, что $\det A_n = \det A_{n,0}$. Тогда система линейных уравнений (3) эквивалентна системе уравнений

$$G_n c_n = b_n. \qquad (4)$$

Разделим обе части (4) на (B_0, B_0); заменим вектор c_n на вектор

$\tilde{c}_n = (c_{n,0}, c_{n,1}, \ldots, c_{n,n-1}, 1)$

и перенесем правую часть последнего уравнения влево. Так как

$$\frac{(B_0, B_1)}{(B_0, B_1)} = \frac{1}{4},$$

и

$$(B_i, B_j) = \begin{cases} (B_0, B_0), i = j; \\ (B_0, B_1), |i-j| = 1; \\ 0, |i-j| > 1. \end{cases}$$

то система (4) эквивалентна

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n,0} \\ c_{n,1} \\ \dots \\ c_{n,n-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (5)$$

Найдем решение системы при неограниченном возрастании n. Обозначим через $c_k = \lim_{n\to\infty} c_{n,n-k}, k \geq 1;$

если A бесконечномерная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

а c и e бесконечномерные вектора

$c = (1, c_0, c_1, c_2, \dots)$ и $e = (1, 0, \dots)$,

то вектор c удовлетворяет линейной системе

$$Ac = e. \qquad (6)$$

Тогда коэффициенты $\{c_k\}$,k=0,1,... удовлетворяют разностному уравнению

$$\frac{1}{4}c_{k+2} + c_{k+1} + \frac{1}{4}c_k = 0 \qquad (7)$$

с начальным условием $c_0 = 1$. Будем искать решение в (7) в виде $c_k = t^k$; решая характеристическое уравнение

$$\frac{1}{4}t^2 + t + \frac{1}{4} = 0,$$

получаем, что $t_{1,2} = -(2 \pm \sqrt{3})$. Выберем в качестве $t = -\omega = -(2-\sqrt{3})$. Осталось показать, что функции $\Phi(x)$ и $\Phi(x-1)$ ортогональны. Так как

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x-n)$$

и

$$(\Phi_n, \Phi_{n-1}) = 0 \qquad (8)$$

то, переходя в (8) к пределу, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\Phi(x-1)dx = 0,$$

чем и завершаем доказательство леммы.

□

Будем искать функцию Ψ в виде

$$\Psi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\gamma_{1-k}\Phi(2x-k), \qquad (9)$$

где $\{\gamma_k\}, k\in Z,$ коэффициенты равенства удвоения

$$\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\Phi(2x-k). \qquad (10)$$

Как хорошо известно, (см. например [3]), функции $\{\Psi(2^n x-k)\}, k,n\in Z$, попарно ортогональны. Вычислим коэффициенты удвоения $\{\gamma_k\}, k\in Z$; с учетом (1) перепишем (10) в виде

$$\Phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\omega^i B(2x+i-k).$$

Обозначим i-k=j; изменяя порядок суммирования, получаем, что

$$\Phi(x)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k\ge i}^{\infty}(-1)^{k+j}\omega^{k+j}\gamma_k\Big)B(2x+j) \quad .(11)$$

Нетрудно проверить (см. также [3]), что

$$B(x)=\frac{1}{2}B(2x+1)+B(2x)+\frac{1}{2}B(2x-1);$$

тогда

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^k\Big(\frac{1}{2}B(2x+2k+1)+ \qquad (12)$$
$$+B(2x+2k)+\frac{1}{2}B(2x+2k-1)\Big).$$

Сравнивая (11) и (12), получаем, что коэффициенты удвоения определяются из бесконечной системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 1 & -\omega & \omega^2 & \cdots \\ & 1 & -\omega & \omega^2 & -\omega^3 & \cdots \\ 1 & -\omega & \omega^2 & -\omega^3 & \omega^4 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdots \\ \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_0 \\ \cdots\end{pmatrix}=b_\omega$$

где через b_ω мы обозначили вектор

$$b_\omega=\Big(\ldots,0,\frac{1}{2},1,\frac{1-\omega}{2},-\omega,-\frac{\omega}{2}(1-\omega),$$
$$\omega^2,\frac{\omega^2}{2}(1-\omega),-\omega^3,-\frac{\omega^3}{2}(1-\omega),\ldots\Big).$$

Умножая последовательно каждую строку на ω и складывая с последующей, вычисляем $\{\gamma_k\}, k\in Z,$ и завершаем доказательство теоремы.

□

3. Построение фундаментального куби-ческого сплайна . Приведем одно приложение полученного результата. Для пары измеримых функций $f,g: R\to R$ определим операцию свертки

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(t-x)dt;$$

тогда

$$(f*g)(0)=(f,g).$$

Пусть $N_3(x)$ B-сплайн третьего порядка

$$N_3(x) = (x+2)_+^3 - 4(x+1)_+^3 + 6x_+^3 -$$
$$- 4(x-1)_+^3 + (x-2)_+^3,$$

где

$$(x-a)_+^3 = \begin{cases} (x-a)^3, x \ge a; \\ 0, x \le a. \end{cases}$$

Обозначим через $L_3(x)$ фундаментальный сплайн третьего порядка, совпадающий на каждом интервале $[j-1, j], j \in Z,$ с кубическим многочленом и удовлетворяющий условиям

$$L_3(j) = \begin{cases} 1, j = 0 \\ 0, j \in Z, j \ne 0 \end{cases} \qquad (13)$$

Тогда справедливо следующее утверждение

Следствие. Если $\omega = 2 - \sqrt{3}$, то

$$L_3(x) = \sqrt{3}(\sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k \omega^k N_3(x+k) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \omega^{k-1} N_3(x+k))$$

есть кубический фундаментальный сплайн.

Доказательство. Так как

$$N_3(x) = 3!\chi * \chi * \chi * \chi(x)$$

и

$$B\ (x) = \chi * \chi(x),$$

где $\chi(x)$ характеристическая функция интервала $[0,1]$, то

$$(B_0, B_0) = 3!N_3(0) \qquad (13)$$

и

$$(B_0, B_1) = 3!N_3(1) = 3!N_3(-1)\,. \qquad (15)$$

Тогда бесконечномерный вектор $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$, являющийся решением системы уравнений

$$3!A\alpha = e,$$

где A бесконечномерная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . \\ & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & \cdots \\ 0 & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

определяет сплайн D_3,совпадающий на каждом интервале $[j-1, j], j \le 1,$ с кубическим многочленом , представленный в виде

$$D_3(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k N_3(x+k),$$

$\alpha_0 = \frac{1}{6}$. Так как в силу леммы $\alpha_k = (-1)^k \frac{1}{6}\omega^k$, то D_3 удовлетворяет условиям

$$D_3(j) = 0, j \le -1; D_3(0) = \frac{1}{6}(N_3(0) -$$

$$\omega N_3(1)), D_3(1) = \frac{1}{6} N_3(1), D_3(x) \equiv 0, x \ge 2.$$

Построим фундаментальный сплайн в виде

$$L_3(x) = \sqrt{3}(-\omega D_3(x+1) + D_3(-x)) .$$

Тогда в силу симметрии

$$L_3(j) = 0, j \ge 1, j \le -2 .$$

В силу (14) и (15)

$$L_3(-1) = -\omega D_3(0) + D_3(1) =$$

$$= \omega^2 N_3(1) - \omega N_3(0) + N_3(1) = 0$$

и

$$L_3(0) = \sqrt{3}(-2\omega N_3(1) + N_3(0)) = 1 .$$

В силу единственности фундаментального сплайна, удовлетворяющего (13), построенная функция является искомой.

□

Литература

1. S.Mallat Wavelet Orthonormal Basis of $L_2(R)$, Trans. of the AMS, 1989, V.315, N1, P.69-87.
2. Y.Meyer Wavelets and Operators, Hermann, Paris, 1990.
3. G.Strang Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction, SIAM Review, 1989,V.31, N4, P.614-627.
4. I.Daubechies Orthonormal Basis of Compactly Supported Waveletes, Comm. Pure Appl. Math., 1988, N41, P.909-996.
5. A. Haar Zur Theorie der Orthogonaren Functionensysteme, Math.Ann., 1910, V.69, P.331-371.
6. P.Franklin A Set of Continuous Orthogonal Functions, Math. Ann., 1928, V.100, P.522-529.
7. Z.Ciesielski Properties of the Orthonormal Franklin System, Studia Math., 1963, V.XXIII, P.141-157.
8. J.Domsta A Theorem on B-splines, Studia Mathematica, 1972, V.XLI, P.291-314.
9. Дж. Алберг У.Нилсон Дж.Уолш. Теория сплайнов и ее приложения. М., Мир, 1972.