Т.Н. Карпова, И.Н. Мурина

О структурной наглядности и наглядности преемственности в курсах элементарной математики и МПМ

Карпова Татьяна Николаевна, ст. преподаватель кафедры методики преподавания математики ЯГПУ, кандидат педагогических наук

Мурина Ирина Николаевна, ст. преподаватель кафедры методики преподавания математики ЯГПУ

Воспитание достаточно высокого уровня математической культуры - одна из основных целей профессиональной подготовки будущего учителя математики. Для достижения этой цели возникает необходимость выбора наиболее эффективных и рациональ
ных путей обучения, внедрение более совершенных методов руководства учебно-познавательной деятельностью студентов, мобилизирующих их творческие способности.

Один из таких путей - сделать процесс обучения наглядным. Под наглядным обучением математике понимаем процесс формирования адекватного категории цели устойчивого результата внутренних действий обучаемых при непосредственном восприятии приемов деятельности, отражающих моделирование отдельного математического знания или организованного набора знаний.

Можно выделить следующие виды наглядности: оперативную, структурную, фоновую, формализованную, дистрибутивную, наглядность преемственности.

На занятиях по элементарной математике преподаватель организует учебно-познавательную деятельность студентов, реализуя разные виды наглядности. На занятиях по МПМ будущие учителя получают возможность самостоятельно и творчески разработать методику изучения отдельных разделов школьного курса математики, используя метод наглядного обучения.

Комплексное сочетание различных видов наглядности обеспечивает формирование у студентов первичных обобщений, установление прочных связей. В различных видах учебно-познавательной деятельности может оказаться доминирующим один из видов наглядности.

“Решение задач является специфической особенностью интеллекта, а интеллект - это особый дар человека; поэтому решение задач можно рассматривать как одно из самых характерных проявлений человеческой деятельности”. [4. С.13]

С нашей точки зрения, большей результативности в указанном виде деятельности можно достичь, сочетая структурную наглядность и наглядность преемственности.

К структурной наглядности отнесем выделение существенного в плане “перцепции”, доведение изучаемого материала до узнаваемости объекта восприятия, расположение изучаемых объектов в определенной системе.

Наглядность преемственности характеризуется опорностью ассоциативных связей внутри раздела, предмета, а также межпредметных связей и включает в себя пропедевтику, опорные мотивационные задачи, циклы задач исследовательского характера. Циклы задач учебно-исследовательского характера - это задачи, связанные единой опорой, идеей, с учетом уровня знаний и возможностей обучаемых.

На первой ступени обучения в курсе элементарной математики студент приобретает знания, умения и навыки в решении определенного круга задач, что является фоном для их обобщения и систематизации на второй ступени обучения. Обобщение ранее усвоенных знаний на базе конкретного материала способствует их более глубокому осознанному усвоению, дает возможность выделить опорные знания, придать им большую информативную емкость, разгрузить память.

Так, например, в разные годы на олимпиадах школьников предлагались задания типа:

1. Доказать неравенство

$1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \ldots \bullet 1973 < 987^{1973}$.

2. Определить знак разности

3.

4.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 \bullet 1978}}+\frac{1}{\sqrt{2 \bullet 1977}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k(1978-k+1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1978 \bullet}}\right.$$

3. Верны ли неравенства:

а) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<1$,

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{99}{100}$?

На занятиях по элементарной математике студенты обобщают выше указанные конкретные задачи, исследуя условия, и переходят к решению обобщенных.

1. Доказать, что для любого ni2 (nON)

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2. Определить знак разности

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1\bullet n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+...+\frac{1}{\sqrt{n\bullet 1}}\right)-2\bullet\frac{n}{n+1}.$$

3. Верны ли неравенства:

а) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1$, ni2 (nON),

б) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n}$, ni2 (nON)?

Единой опорой решения этих задач является неравенство Коши.

Приведем решение первых двух обобщенных задач.

Решение задачи 1.

I способ.

$$\sqrt[n]{1\bullet 2\bullet 3\bullet...\bullet n}<\frac{1+2+3+...+n}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+}{2}$$

.

Следовательно, $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

II способ.

$$\frac{n+1}{2}>\sqrt{n\bullet 1}$$

$$\frac{(n-1)+2}{2}>\sqrt{(n-1)\bullet 2}$$

. . . .

$$\frac{2+(n-1)}{2}>\sqrt{2\bullet(n-1)}$$

$$\frac{1+n}{2}>\sqrt{1\bullet n}$$

Перемножая левые и правые части этих неравенств, получаем

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>\sqrt{(n!)^2},$$

откуда и следует справедливость доказываемого неравенства.

Решение задачи 2.

Используя неравенства Коши для двух положительных чисел $\left(\frac{1}{\sqrt{ab}}\geq\frac{2}{a+b}\right)$,

запишем: $\frac{1}{\sqrt{1\bullet n}}>\frac{2}{1+n}$

$$\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}>\frac{2}{2+(n-1)}$$

. . . .

$$\frac{1}{\sqrt{n\bullet 1}}>\frac{2}{n+1}.$$

Складывая левые и правые части верных неравенств, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1\bullet n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+...+\frac{1}{\sqrt{n\bullet 1}}>\frac{2n}{n+1}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\sqrt{1\bullet n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+...+\frac{1}{\sqrt{n\bullet 1}}-2\bullet\frac{n}{n+1}>0.$$

Обычно формулировка обобщенной задачи вызывает у студентов гораздо меньшее затруднение, чем нахождение способа решения.

Для решения задачи: сравнить числа

а) $\sqrt[1991]{1991!}$ и $\sqrt{1991}$,

б) $\sqrt{1986}+\sqrt{1984}$ и $2\sqrt{1985}$,

в) $\sqrt[3]{1986}+\sqrt[3]{1984}$ и $2\sqrt[3]{1985}$

обобщенной является следующая:

Сравнить

а) $\sqrt[n]{n!}$ и $\sqrt{n}$, n>2 (nON),

б) $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ и $2\sqrt{n}$ (nON),

в) $\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n-1}$ и $2\sqrt[3]{n}$ (nON).

При решении обобщенной задачи чаще всего предполагается лишь метод математической индукции. Однако будущий учитель должен владеть и методами, которые могут быть использованы в обязательном курсе школьной математики, в частности, свойствами числовых неравенств.

Для получения ответа необходимо сравнить:

а) $(n!)^2$ и n^n,

б) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ и $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$,

в) $\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$ и $\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}$.

Навыки работы исследовательского характера студенты также приобретают в результате подбора и составления задач внешне различных, но имеющих структурное сходство по сквозным темам элементарной математики.

Например, умение выделять полные квадраты многочленов является определяющим для решения следующих задач.

1. Доказать, что для любых действительных значений переменных верны неравенства:

а) $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y \geq -2$,

б) $x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z$,

в) $x^2 + 19y^2 + 6z^2 - 8xy - 4xz + 12yz \geq 0$,

г) $x(x+1)(x+2)(x+3) \geq -1$.

2. Найти все действительные значения x, y, z, удовлетворяющие уравнению
$2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2x + 2z + 1 = 0$.

3. При каких a и b справедливо неравенство $a^2 + ab + b^2 > 3(a + b - 1)$?

На занятии по элементарной математике разные группы студентов решают одну и ту же задачу, но с разной формулировкой условия.

Пример 1.

а) Принадлежит ли число -5 области значений многочлена

$P(x) = x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1$?

б) Доказать неравенство

$x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1 \geq -3$.

в) При каких значениях а уравнение
$x^6 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = a$ не имеет действительных корней ?

г) Решить уравнение

$x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$.

Пример 2.

а) Решить уравнение

$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$.

б) Доказать, что график функции
$f(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ не пересекает ось абсцисс.

в) Доказать, что уравнение
$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = 0$ не имеет действительных корней .

г) Доказать неравенство

$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.

д) Решить неравенство

$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 < 0$.

Курс элементарной математики тесно связан с курсом методики ее преподавания. Задачи, решаемые на занятиях по элементарной математике, содержат методический компонент. Так, например, мы учим студентов отыскивать встречавшийся ранее прием решения, подбирать цепочки вспомогательных задач, расположенных в порядке убывания сложности.

1. Для построения графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + 4}$ вспомогательными могут служить задачи:

- сократить дробь $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^4 + 4}$;
- разложить на множители $x^4 + 4$;
- доказать, что $n^4 + 4$ $(n \in N)$ - число составное.

2. При каких значениях а уравнение $\log_2(x^2 + 2x + 5) = \dfrac{(a+1)x + 5 + a}{x + 1}$ не имеет решений ?

Вспомогательные задачи:

- решить уравнение $\log_2(x^2 + 2x + 5) = \dfrac{x+5}{x+1}$;
- построить график функции $y = f \circ g$, где $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = x^2 + 2x + 5$, без использования производной;
- исследовать на монотонность функцию $y = f \circ g$;
- доказать теорему о согласовании свойства монотонности функции с операцией композиции;
- построить график функции $y = \dfrac{x+5}{x+1}$.

Разбиение задачи на подзадачи - это умственное действие, являющееся одним из определяющих элементов исследовательской деятельности.

Выявлению взаимосвязи свойств основных элементарных функций с операциями на множестве функций и составлению циклов учебно-исследовательских задач студенты учатся при выполнении и составлении упражнений типа:

1) Построить эскизы графиков функций:

$$y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y = \sqrt{\frac{2x}{1+x^2}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{2x}{1+x^2}},$$

$$y = a^{\frac{2x}{1+x^2}}, \quad y = \log_a \frac{2x}{1+x^2}, \quad y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2},$$

$$y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1+x^2}, \quad y = \sqrt{\log_a \frac{2x}{1+x^2}};$$

2) Какой вид имеет график функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + px + q}\ ?$$

3) Решить уравнения: $2^{2x} = 5 - x$,

$$x^2 + 5x - 4\sqrt{x} + 15 = 0, \quad 2\sin\frac{\pi}{2}x = \frac{x^2+1}{x}.$$

4) Определить число корней уравнения:

$|3-|x||-|x-5|=a$, $x^3 = ax+1$,

$\frac{x^2-3x+1}{x^2+1} = a$, $\log_2(x+\sqrt{x^2+1}) = a$

и др.

Приведенные выше приемы моделирования учебной деятельности при наглядном обучении способствуют профессионализации процесса обучения в педвузе, развитию у будущих учителей логического мышления, математической культуры, в частности, математической интуиции, стимулирует любознательность, стремление к поискам и открытиям, создавая необходимые условия для перехода на более высокие уровни мышления.

Литература

1. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учеб. пособие для 10-11 кл.сред.шк./ Б.М.Ивлев, А.М.Абрамов и др. М.: Просвещение, 1990.

2. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1991.

3. Непрерывное педагогическое образование. Вып. VIII РГПУ, УМО ОППО, ЯГПУ. Ярославль: ЯГПУ, 1995.

4. Пойа Д. Математическое открытие. М: Наука, 1976.

5. Туманов С.И. Поиски решения задачи. М.: Просвещение. 1969.

6. Фридман Л.М., Кулагина И.Ю. Психологический справочник учителя. М.: Просвещение, 1991.