онного процесса живого вещества» [5. С. 22], В. И. Вернадский рассматривал возникновение человека и его воздействие на природу как исторически обусловленный, качественно новый этап эволюции биосферы. В своих последних работах [1, 5, 8] он считает истребление природных ресурсов временным явлением, обусловленным недостатком знаний и низким культурным уровнем населения. Он выражает уверенность в том, что при разумном отношении к антропогенному преобразованию природной среды суммарные ресурсы биосферы смогут возрастать быстрее, чем численность человечества. Такую разумно организованную биосферу, способную удовлетворить материальные и духовные потребности человека, В. И. Вернадский назвал «ноосферой». «Ноос» — древнегреческое название человеческого разума, следовательно, ноосфера — это сфера человеческого разума.

Известно, что термин «ноосфера» В. И. Вернадскому не принадлежит. Его предложил французский философ Э. Леруа (1927) со ссылкой на то, что он вводит этот термин для будущего состояния биосферы, прослушав в Сорбонне курс лекций В. И. Вернадского [12. С. 11].

Особенности эпохи ноосферы широко обсуждались П. Тейяром де Шарденом, однако в соответствии со своим мировоззрением он не считал разум результатом эволюции мыслительного аппарата. В. И. Вернадский воспользовался этим термином при характеристике современного этапа эволюции биосферы. Он отмечал: «Ноосфера — последнее из многих состояний эволюции биосферы — состояние наших дней» [5. С. 242]. «В ней впервые человек становится крупнейшей геологической силой. Он может и должен перестраивать своим трудом и мыслью область своей жизни, перестраивать коренным образом по сравнению с тем, что было ранее» [5. С. 241].

Долгое время новые, оригинальные и принципиально отличные от традиционных представлений идеи В.И.Вернадского о возникновении жизни, сложности и неоднородности первичной биосферы, полифилетическом происхождении органического мира, связи эволюции видов с эволюцией биосферы и др. оставались вне поля зрения большинства биологов. «Только могуществом консервативных традиций в биологии», по мнению Э. И. Колчинского, «можно объяснить тот факт, что эти идеи В.И.Вернадского не нашли в своё время должного признания» [10. С. 39].

Многие направления, исследования биосферы, намеченные В. И. Вернадским, получили дальнейшее развитие лишь в последние десятилетия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вернадский В. И. Биохимические очерки. М.: Изд-во АН СССР, 1940. 250 с.
2. Вернадский В. И. Живое вещество и биосфера. М.: Наука, 1994. 495 с.
3. Вернадский В. И. Избранные труды по истории науки. М.: Наука, 1981. 359 с.
4. Вернадский В. И. Избранные произведения, Т.5. М.: Наука, 1960. 422 с.
5. Вернадский В. И. Научная мысль как планетное явление. М.: Наука, 1991. 271 с.
6. Вернадский В. И. Размышления натуралиста: пространство и время в живой и неживой природе. М.: Наука, 1975. 175 с.
7. Вернадский В. И. Труды по геохимии. М.: Наука, 1994. 495 с.
8. Вернадский В. И. Химическое строение биосферы Земли и её окружения. М.: Наука, 1965. 374 с.
9. Казначеев В. П. Учение В. И. Вернадского о биосфере и ноосфере. Новосибирск: Наука, 1989. 248 с.
10. Колчинский Э. И. Эволюция биосферы. Л.: Наука, 1990. 236 с.
11. Моисеев Н. Н. Слово об учителе / Владимир Вернадский. Жизнеописание. Избранные труды. Воспоминания современников. Суждения потомков. М.: Современник, 1993. С. 9-14.
12. Яншин А. А. Живое вещество и биосфера в трудах В. И. Вернадского / Вернадский В. И. Живое вещество и биосфера. М.: Наука, 1994. С. 5-15.

Д. Ю. Кузнецов, Т. Л. Трошина

Использование темы «Цепные дроби» на уроках математики

Математика как наука и как область деятельности человеческого разума по своей природе двойственна. С одной стороны, ее объекты, понятия, построения, строго говоря, идеальные и существуют лишь в человеческом воображении (например, прямая линия, не имеющая толщины, так что ее невозможно увидеть). С этой точки зрения математику можно рассматривать как некоторую игру, как, например, игру в шахматы, с определенным набором фигур (понятий) и правил игры. С другой стороны, рассматриваемые математические объекты и понятия являются идеальными воплощениями реальных физических объектов и их свойств, взаимосвязи между объектами и логические построения в той или иной степени отражают реальные физические законы. Поэтому математические конструкции во многих случаях имеют ту или иную интерпретацию в областях, на первый взгляд далеких от математики.

Проводя аналогию с философией Платона, можно сказать, что математика имеет дело не с вещами, а с идеями вещей. Кстати, сам Платон, как и в целом древнегреческие ученые, очень высоко оценивал занятия математикой: «С помощью математики очищается орган души и, как в очищающем огне, пробуждается к новым жизненным силам, в то время как другие занятия его уничтожают и лишают зрения; он же заслуживает быть сохраненным более, чем тысяча телесных глаз, ибо только он видит истину»[2].

Насколько же теперь отличается понимание значения математики от вышеизложенного! Учителя зачастую слышат на уроках фразы типа «а зачем нам это надо» или «а где это может пригодиться». В целом по вопросу об отношении к математике можно выделить три категории учащихся. Первая – это те, у кого мотивация к изучению математики основана на интересе к самому предмету, другими словами, им нравится играть в эту игру. Вторая включает в себя тех, кто в целом имеет интерес к познавательной деятельности, но круг их интересов сконцентрирован в других областях (типичная ситуация в классах с гуманитарным уклоном). И, наконец, третья категория состоит из учащихся с низкой мотивацией к образовательной деятельности и не имеющих интереса к учебе. И если для первой категории при проведении уроков и факультативных занятий можно делать упор на углубленное изучение тех или иных разделов математики, то для второй категории обучаемых более целесообразно делать акцент на общекультурный, междисциплинарный и прикладной аспекты математики, ее роль инструмента познания мира. При этом, на наш взгляд, целесообразно наряду с обеспечением обязательного содержательного минимума государственного стандарта образования более широко использовать темы, традиционно выходящие за рамки школьной программы и в то же время не требующие серьезных математических знаний. В частности, это относится к теории чисел, теории игр, теории вероятностей, топологии и так далее. В качестве иллюстрации рассмотрим такой, казалось бы, абстрактный объект в теории чисел, как цепные дроби.

Как известно, цепной (или непрерывной) дробью называется выражение вида

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

(см., например, [1]), и притом преимущественно в предположении, что все элементы a_i – целые положительные числа. Этот наиболее важный и вместе с тем наиболее изученный класс цепных дробей лежит в основании почти всех арифметических и многих аналитических приложений теории.

Дроби a_0, $a_0+\dfrac{1}{a_1}$, $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}}, \ldots$ называются подходящими дробями цепной дроби.

Все рациональные и вещественные числа однозначно изображаются цепными дробями. К примеру, хорошо известны разложения в цепную дробь чисел e и золотого сечения φ:

$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\ldots}}}},$$

$$\varphi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}.$$

Цепные дроби имеют несомненное преимущество перед систематическими (и, в частности, десятичными дробями): в то время как систематическая дробь связана с определенной системой счисления и потому неизбежно отражает в себе не столько абсолютные свойства изображаемого ею числа, сколько его взаимоотношения именно с этой выбранной системой счисления, цепные дроби ни с какой системой счисления не связаны и в чистом виде воспроизводят свойства изображаемых ими чисел. Например, рациональность или иррациональность изображаемого числа находят полное выражение в конечности или бесконечности соответствующей ему цепной дроби. Для систематических дробей соответствующий признак значительно сложнее: конечность или бесконечность изображающей дроби зависит здесь кроме природы изображаемого числа существенным образом от того, в каком отношении оно стоит к выбранной системе счисления.

Однако есть существенное практическое требование, которому аппарат цепных дробей не удовлетворяет. Это требование заключается в простоте правил арифметических действий, без чего этот аппарат не может служить удобным орудием счета. Таким удобством обладают систематические дроби. Напротив, для цепных дробей никаких практически приемлемых правил арифметических действий не существует; уже задача отыскания цепной дроби для суммы по цепным дробям слагаемых чрезвычайно сложна и в счетной практике невыполнима. Поэтому на практике для счета пользуются почти исключительно систематическим дробями, в то время как в теоретических исследованиях при изучении арифметических свойств некоторых иррациональностей преимущественно применяется аппарат цепных дробей, являющийся наилучшим и незаменимым орудием такого рода исследований.

Обратимся теперь к примерам использования понятия цепной дроби в других дисциплинах.

Механика. Одним из первых ученых, обратившихся к цепным дробям, был известный голландский физик и математик Христиан Гюйгенс. Обдумывая конструкцию планетария, он встретился с таким затруднением. Планетарий приводился в движение с помощью зубчатых колес. По расчетам оказалось, что отношение числа зубцов m/n двух каких-либо колес должно быть равным отношению времен обращения двух планет вокруг Солнца. А это отношение выражается достаточно точно в виде несократимой дроби с большими числителем и знаменателем (оба выражались шестизначными числами). Понятно, что изготовить зубчатые колеса, у которых число зубцов выражается шестизначным числом, практически очень сложно, да и прочность зубцов была бы небольшая. Тогда Гюйгенс стал искать среди дробей с меньшими числителем и знаменателем, чем у дроби m/n, ту, которая ближе всего к дроби m/n. Эту задачу он сумел решить с помощью цепных, вернее, подходящих дробей. Оказывается, если у нас есть обыкновенная дробь с большими числителем и знаменателем, то ее наилучшее приближенное значение с какой-то степенью точности дает именно подходящая дробь i-го порядка для цепной дроби, в которую разлагается данная обыкновенная дробь (порядок i подходящей дроби зависит от необходимой степени точности). Это приближенное значение гораздо точнее, чем привычное для нас приближение с помощью десятичных дробей.

Музыка. Пример применения наилучших приближений, полученных с помощью цепных дробей, – математическое объяснение того, почему со времен Баха в музыке используют равномерно темперированную шкалу, содержащую 12 полутонов в каждой октаве.

Наряду с основным тоном каждого инструмента (вызываемым, например, колебанием струны) звуковое колебание содержит ряд обертонов, создающих тембровую окраску звука. Если, например, длина струны L при заданном натяжении такова, что она издает звук «до» первой октавы, соответствующий W=512 колебаниям в секунду, то струна длиной $\frac{2}{3}L$ издает звук, имеющий частоту $\frac{3}{2}W$ (натуральная квинта), струна длиной $\frac{1}{2}L$ издает звук, имеющий частоту $2W$ (октава). Наше ухо улавливает при сравнении высоты двух звуков не отношение их частот, а логарифм этого отношения. Если принять интервал в одну октаву за единицу, то основание логарифмов надо выбрать так, чтобы было: $\log_a \frac{2W}{W}=1$, то есть a=2. Натуральная квинта воспринимается слухом как интервал $\log_2 \frac{\frac{3}{2}W}{W}=\log_2 3-1$.

В своем произведении «Хорошо темперированный клавир» Иоганн Себастьян Бах написал 24 фуги для клавира, у которого произведена равномерная темперация, то есть деление октавы на 12 равных (по слуху) интервалов (полутонов). Почему же исторически именно 12? Ответ дает теория непрерывных дробей. Наш слух естественно воспринимает именно натуральную квинту, и делить октаву надо на столько частей, чтобы число $\log_2 3-1$ хорошо приближалось дробью с выбранным знаменателем. Разложив это число в непрерывную дробь, находим подходящие дроби: 1, 1/2, 3/5, 7/12, 24/41,... Приближения 1 и 1/2 слишком грубые (первое из них означает, что мы приравниваем квинту к октаве). Приближение 3/5 соответствует пентатонике, существующей у народов Востока. А приближение 7/12 самое удачное. Оно соответствует делению октавы на 12 частей (полутонов), и 7 таких полутонов соответствуют квинте. Сравнение числа $\log_2 3-1=0{,}5849625...$ с $7/12=0{,}5833...$ показывает качество приближения: разница высот темперированной квинты (7/12) и натуральной квинты ($\log_2 3-1$) не улавливается даже профессиональными музыкантами.

Кроме звука «соль» (квинта от «до») важную роль играют следующие звуки, входящие в основные трезвучия:

«фа»: длина струна $\frac{3}{4}L$, частота $\frac{4}{3}W$,

$\log_2 \frac{\frac{4}{3}W}{W}=2-\log_2 3$»5/12;

«ми»: длина струны $\frac{4}{5}L$,, частота $\frac{5}{4}W$,

$\log_2 \frac{\frac{5}{4}W}{W}=\log_2 5-2$»4/12;

« ми бемоль»: длина струны $\frac{5}{6}L$, частота $\frac{6}{5}W$,

$\log_2 \frac{\frac{6}{5}W}{W}=1+\log_2 3-\log_2 5$»3/12.

Надо отметить, что приближение для натурального звука «ми» (4 полутона от основного тона) не такое хорошее, как для натуральной квинты, и скрипачи различают звуки «фа» и «ми диез».

Астрономия. Задолго до нашей эры вавилонские наблюдатели неба подметили, что ряд солнечных и лунных затмений повторяется каждые 18 лет и 10 дней; пользуясь этим, древние предсказывали наступление затмений. Обоснование такой периодичности было найдено гораздо позднее в результате тщательного изучения движения Луны.

В астрономии различают пять видов месяцев, из которых нас интересуют сейчас только два:

1. «Синодический» месяц, то есть промежуток времени, в течение которого Луна совершает по своей орбите полный оборот, он равен 29,5306 суток;

2. «Драконический» месяц, то есть промежуток, по истечении которого Луна возвращается в тот же «узел» (узел – это пересечение лунной орбиты с плоскостью земной орбиты), он равен 27,2122 суток.

Затмения происходят только в моменты, когда Луна в фазе полнолуния или новолуния бывает в одном из своих узлов: тогда ее центр находится на одной прямой с центрами Земли и Солнца. Как находить подобные промежутки времени? Для этого надо решить уравнение $29{,}5306x=27{,}2122y$, где x и y – целые числа. Очевидно, наименьшие точные решения этого уравнения таковы: $x=272122$, $y=295306$. Получается огромный, в десятки тысячелетий, промежуток времени, практически бесполезный. Древние астрономы довольствовались приближенным решением. Наиболее удобное средство для отыскания приближений в подобных случаях дают цепные дроби. Развернув дробь 295306/272122 в цепную, получаем такие последовательные приближения: 12/11, 13/12, 38/35, 51/47, 242/223, ... Пятая дробь в этом ряду дает уже достаточную точность. Если остановиться на ней, то есть принять $x=223$, $y=242$, то период повторяемости затмений получится приблизительно равным 18 годам 10 суткам.

Биология. Одним из основных видов спиралей, встречающихся в природе, является логарифмическая спираль. Это объясняется, в частности, тем, что она не меняет своей формы при увеличении размеров (спираль с уравнением $\rho = ae^{k\varphi}$ инвариантна относительно гомотетии с коэффициентом $e^{2\pi k}$), что соответствует принципу роста живого организма. Классический пример — раковины моллюсков. При этом пропорции спирали тесно связаны с золотым сечением $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, а именно, последовательное отношение между ее ортогональными «диаметрами» равно φ. Подходящими дробями числа φ являются отношения чисел Фибоначчи: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13,... Это одна из причин того, что пропорции, задаваемые этими числами, так часто встречаются в живой природе.

Правильное спиральное расположение можно встретить у листьев побега какого-нибудь растения; в ботанике это явление известно под названием «филотаксиса». При этом отношение углового расстояния между двумя соседними листьями к полному углу в 360° зачастую выражается одной из приведенных выше дробей.

Раздел «Цепные дроби» – это всего лишь один из множества разделов, выходящих за рамки школьной программы, изучение которых может оказать большую помощь учителю в преподавании математики (особенно в классах гуманитарного профиля), в пробуждении у учащихся интереса к предмету. Изучение подобных тем особенно привлекательно еще и потому, что, с одной стороны, не требует овладения сложным математическим аппаратом, а с другой, подчеркивая связь математики с различными, порой самыми неожиданными областями знания, создает у учащихся представление о математической гармонии Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Я.Хинчин. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.
2. Платон. Государство. Собрание сочинений. Т. 3. М.: Мысль, 1994.
3. Я.И.Перельман. Занимательная астрономия. Екатеринбург: Тезис, 1994.
4. Г.Вейль. Симметрия. М.: Наука, 1968.

А. И. Григорьев, В. А. Коромыслов

ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

В курсе физики высшей школы уравнению Шредингера и связанных с ним задачам отводится весьма значительное место. Тем не менее, в традиционном изложении, в отличие от строгих выводов основополагающих уравнений в других разделах физики, уравнение Шредингера постулируется, что не всегда адекватно воспринимается студентами. В данной статье обращается внимание преподавателя на логически более ясный вариационный вывод уравнения Шредингера из принципа наименьшего действия. Использование подобного подхода представляется весьма полезным, по крайней мере, для процесса преподавания на уровне факультатива. Такой метод позволяет, с одной стороны, провести строгий вывод уравнения Шредингера, с другой, — наглядно показывает, что уравнение Шредингера представляет собой предельный случай более сложного уравнения, решения которого описывают релятивистские свойства микрообъекта.

Пусть имеется микрочастица, описываемая непрерывной, конечной и однозначной функцией $\Psi(\vec{r},t)$. По сравнению с классической физикой, где состояние частицы определялось заданием в каждый момент времени координат и импульсов, состояние квантовой частицы будем описывать, фактически сопоставляя ей поле $\Psi(\vec{r},t)$. Как известно, $|\Psi|^2$ имеет смысл поля вероятности. В итоге по сравнению с классической частицей, имеющей три степени свободы, квантовый микрообъект, обладающий свойствами и частицы, и волны, будет иметь бесконечное число степеней свободы. Если положение классической частицы в наиболее общем случае определялось 4-вектором, то состояние квантовой частицы будем определять бесконечно мерным вектором $\Psi(\vec{r},t)=\Psi(x)$ в гильбертовом пространстве.

В классической физике функция Лагранжа системы с N степенями свободы определялась суммой $\sum_{i=1}^{N} L_i$. В нашем случае бесконечного числа степеней свободы функция Лагранжа определится интегралом по всему пространству:

$$L=\int \Lambda\left(x,\Psi,\partial\Psi/\partial x,\partial^2\Psi/\partial x^2,...\right)d^4x.$$

$\Lambda(x,\Psi,...)$ назовем плотностью функции Лагранжа или лагранжианом. Тогда действие запишется в виде:

$$S=\int Ldt=\int\left\{\int \Lambda d^3x\right\}dt=\int \Lambda d^4x,$$

где $d^4x\equiv d^3xcdt$ — элемент объема четырехмерного пространства, *c* — скорость света в вакууме.

Примем, что $\Lambda=\Lambda(x,\Psi,\partial\Psi/\partial x)$. Это необходимо сделать, чтобы при переходе к классической физике уравнения движения не содержали производных выше второго порядка (то есть чтобы движение полностью определялось заданием координат и скоростей [1]). Тогда, рассматривая действие как функционал, определенный на функциях $\partial\Psi(x)$ в четырехмерном пространстве, и требуя обращения в ноль вариаций $\partial\Psi(x)$ на границе области интегрирования, из принципа наименьшего действия после тривиальной математической процедуры получим уравнение Лагранжа-Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial\Lambda}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_\nu\right)}-\frac{\partial\Lambda}{\partial\Psi}=0;\quad n=1,2,3,4. \qquad (1)$$

Вид лагранжиана для свободной частицы легко установить из соображения симметрии (напомним, что функция Лагранжа для свободной частицы в классической физике также определялась из соображения симметрии [1]). Если потребовать,