чтобы уравнение движения квантовой частицы было линейно, инвариантно относительно трансляций и преобразований Лоренца, то с точностью до мультипликативного множителя и аддитивной четырехдивергенции (см. например, [2])

$$\Lambda = -\left\{\left(\partial\Psi/\partial x_\nu\right)^2 + \left(cm\Psi/h\right)^2\right\}, \qquad (2)$$

где множитель *(-1)* взят, чтобы энергия была положительна, а m — вещественный параметр, имеющий смысл массы покоя частицы.

Подставим *(2)* в *(1)* и получим уравнение движения квантовой частицы:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x_\nu^2} - \frac{c^2}{h^2}m^2\Psi = 0 \qquad (3)$$

или

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{c^2}{h^2}m^2\right)\Psi = 0, \qquad (3a)$$

где Δ — оператор Лапласа. В данном месте вывода, не вдаваясь в обсуждение релятивистских особенностей, следует отметить, что уравнение *(3)* есть уравнение Клейна-Гордона, что его решение описывает состояние релятивистской квантовой частицы. При $c \to \infty$ уравнение *(3а)* должно приводиться к уравнению для нерелятивистской квантовой частицы. Для перехода к нерелятивистскому пределу следует учесть, что энергия в релятивистском и нерелятивистском случаях отсчитывается от разных начальных значений. Примем:

$$E_{рел} - E_{нр} = mc^2$$

С учетом этого в *(3а)* примем

$$\Psi_{рел}(\vec{r},t) = \Psi_{нр}(\vec{r},t)\exp\left(-i\frac{mc^2}{h}t\right). \qquad (4)$$

Подставим *(4)* в *(3а)* и при $c \to \infty$ получим уравнение свободного движения нерелятивистской квантовой частицы, которое называется уравнением Шредингера:

$$ih\frac{\partial\Psi_{нр}}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi_{нр}.$$

Предлагаемый вывод уравнения Шредингера, несмотря на схематичность и кажущуюся сложность, представляется более убедительным, чем стандартные для учебников утверждения, что уравнение Шредингера не выводится, а постулируется и что его справедливость подтверждается практикой. Повторять же на занятиях логику рассуждений Шредингера, приведших к получению уравнения, нет возможности ввиду ограниченности лекционного времени. Качественные рассуждения, «на пальцах», только еще более путают студентов. В этой связи предлагаемый вывод может быть полезен, и если его гносеологическая ценность невелика, то психологическое влияние несомненно положительно.

Кроме того, предлагаемый вывод уравнения Шредингера существенно упрощает подход к изучению релятивистских свойств микрочастиц, так как студенты сразу видят, что уравнение Шредингера есть просто нерелятивистский предел другого, более сложного уравнения, решения которого описывают релятивистские свойства микрообъекта.

Отметим также, что все законы сохранения квантовых частиц легко могут быть получены из *(1),* теоремы Неттерра (известной студентам по курсу теоретической механики и математической физики) и требования симметрии уравнений Лагранжа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1973. 208 с.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: Наука, 1980. 320 с.

В. Ф. Чаплыгин

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

Опыт работы с учителями и учащимися, анализ результатов вступительных экзаменов свидетельствуют о серьезных трудностях, которые испытывают школьники при решении нестандартных задач. Это наблюдение относится не только к обычным школам, но и к школам с углубленным изучением математики.Под нестандартными задачами понимают задачи необычные как по постановке и содержанию, так и по методам решения. К таким можно отнести задачи на сравнение действительных чисел и доказательство их иррациональности, текстовые задачи на движение, работу, сплавы, смеси, проценты, особенно приводящиеся к неопределеннным уравнениям и смешанным системам, состоящим из уравнений и неравенств, оптимизационные задачи и задачи с параметрами. Роль этих задач, их важность и польза для развития логического мышления, интуиции, творческих способностей учащихся, формирования у них высокой математической культуры очень велики. Известно, что и педагоги сталкиваются с серьезными методическими проблемами при обучении решению таких задач, несмотря на наличие довольно большого числа учебных пособий и журнальных статей. На наш взгляд, учитель прежде всего должен помочь учащимся преодолеть психологический барьер, некоторый синдром страха при встрече с новой задачей, когда они просто теряются, то что называется опускают руки и говорят, что они этого не проходили. Им можно посоветовать самым внимательным образом изучить содержание задачи, вникнуть в него, правильно понять вопрос, на который они должны ответить, и, не пытаясь использовать готовые штампы, алгоритмы, искать путь к решению. Если задачу можно решить алгебраическим методом, то необходимо осуществить выбор переменных, не ставя в качестве обязательного условия минимизацию их количества, затем составить уравнения или неравенства в соответствии с содержанием задачи, то есть, иначе говоря, получить ее математическую модель. Далее следует обратить внимание учащихся на тот факт, что из полученных уравнений и неравенств не всегда требуется найти каждую переменную в отдельности, а, может быть, какое-либо отношение между ними. Продемонстрируем эту мысль на примере.

Задача 1. В бассейн проведены 4 трубы. Через первую, вторую и третью он наполняется за 12 минут, через вторую и четвертую — за 15 минут, через первую, третью и четвертую — за 20 минут.За какое время наполнится бассейн, если открыть все четыре трубы?

Обозначив через *x, y, z, u* производительность каждой из труб, придем к системе уравнений

$$\begin{cases}12(x+y+z)=15(y+u),\\ 15(y+u)=20(x+z+u)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x-y+4z-5u=0,\\ 4x-3y+4z+u=0.\end{cases}$$

Из этой системы легко находятся $x=2u-z$ и $y=3u$. После этого можно ответить на вопрос задачи $t=\dfrac{15(y+u)}{x+y+z+u}=\dfrac{15\cdot 4u}{6u}=10$.

Рассмотрим задачу, приводящую к смешанной системе.

Задача 2. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. В последний момент двое отказались участвовать в покупке, поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 руб. больше. Сколько стоил магнотофон?

Пусть x -число студентов в группе, y -величина первоначально предполагаемого взноса. (Обратите внимание, мы не ввели в качестве неизвестной переменной стоимость магнитофона — это было бы неудобно.) Получаем систему:

$$\begin{cases}xy=(x-2)(y+1),\\ 170\le xy\le 195\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y=2,\\ 170\le xy\le 195.\end{cases}$$

Следовательно, $340\le x(x-2)\le 390$. Мы исключили y сознательно, т.к. априори известно, что x — натуральное число. Решая систему неравенств, получаем $19<1+\sqrt{341}\le x\le 1+\sqrt{391}<21 \Rightarrow x=20$. Далее находим $y=9$ и стоимость магнитофона $xy=180$.

Много интересных задач содержится в [1, 2, 5, 10].

Приведем две задачи на действительные числа из [4].

Задача 3. Укажите на окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=1$, все точки, обе координаты которых рациональны.

Может быть, вначале следует найти с помощью учащихся несколько требуемых точек: $A(0; 1)$, $B(0; -1)$, $C\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{4}{5}\right)$ и т.д. Далее составить уравнение прямой, проходящей через точку B и точку $M(r_1, r_2)$ с рациональными координатами, при $r_1\neq 0$, которое имеет вид $y=\dfrac{r_2+1}{r_1}x-1$. Обратите внимание учащихся на то, что угловой коэффициент прямой является рациональным числом, и напомните еще раз, что множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ замкнуто относительно арифметических операций. Если взять прямую, заданную уравнением $y=rx-1$, где $r\in\mathbb{Q}$, и найти точку пересечения с окружностью, то получим $N\left(\dfrac{2r}{r^2+1};\dfrac{r^2-1}{r^2+1}\right)$. Таким образом найдем все точки с двумя рациональными координатами, кроме $A(0;\ 1)$. Обсуждая с учащимися задачу, необходимо подчеркнуть, что вначале мы получили уравнение прямой BM вида $y=kx-1$, где $k\in\mathbb{Q}$, то есть рациональность k выступала как необходимое условие, а затем, задав прямую уравнением $y=kx-1$ с рациональным угловым коэффициентом, показываем, что это условие является и достаточным для пересечения этой прямой окружности в точке с рациональными коэффициентами.

Задача 4. Докажите иррациональность $\cos 20^o$.

Используя формулу $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, получим, что $t=\cos 20^o$ является корнем уравнения $4t^3-3t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 8t^3-6t-1=0$. Если выполнить замену $x=2t$, то придем к уравнению $x^3-3x-1=0$, которое , как нетрудно показать, не имеет рациональных корней. Следовательно, $t=\cos 20^o$- число иррациональное.

Остановимся далее на задачах с параметрами, которые являются традиционно трудными и постоянно предлагаются на конкурсных экзаменах. Пособия [1-3, 6] содержат большое число таких задач и дают методы их решения, и тем не менее в настоящей статье мы еще раз обратимся к ним, предлагая некоторые методические рекомендации по их решению. Особое внимание уделим замене переменной и связанной с ней переформулировкой задачи, использованию свойств функций, а также геометрическому подходу к решению задач. Наши советы адресованы прежде всего молодым учителям и студентам, готовящим себя к преподавательской деятельности, но при этом мы надеемся, что и опытные педагоги смогут почерпнуть что-либо полезное для себя. Не ставя целью давать только теоретические построения, покажем на характерных примерах методические приемы, которые с успехом можно применить в аналогичных ситуациях. Очень важно показать учащимся, что в одних случаях параметр можно рассматривать как число, которое не определено явно, а в других — как переменную, равноправную с основной переменной.

Использование области определения и множества значений функции

Если предложить учащимся решить три уравнения: $\sqrt{x}=1$, $\sqrt{x}=-1$ и $\sqrt{x}=a$, то с первыми двумя проблемы не возникнет. Решением первого является $x=1$, второе решений не имеет, а при решении третьего наиболее типичный ответ $x=a^2$ без оговорки условия $a\geq 0$. Фактически эта ошибка связана с непониманием такого простого, но очень важного обстоятельства, что уравнение $f(x)=a$ имеет решение в том и только в том случае, если $a\in E(f)$, где $E(f)$ — множество значений функции $f(x)$. Вопрос: при каких значениях параметров уравнения $\sin x+\cos x=a$ и $a\sin x+b\cos x=c$ имеют решения — для многих учащихся является трудным.

Задача 5. Найдите все значения a, при которых уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right)=a+\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$ имеет решение.

Нетрудно преобразовать данное уравнение к виду $\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{a-1}{2}$, где $t=2^{2x-x^2}$. Множеством значений функции $t=2^{2x-x^2}$ является промежуток $(0;\ 2]$, а функции $\cos\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$ — промежуток $[-1;\ \frac{1}{2})$. Следовательно, исходное уравнение имеет решение для тех и только для тех значений a, для которых

$$-1\leq\frac{a-1}{2}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -1\leq a<2.$$

Учащихся необходимо убедить в том, что множество значений непрерывной функции, заданной на связном множестве, также является связным множеством, то есть заполняет сплошь некоторый интервал. (Строго доказать это в школе нет возможности.) Множество значений функции полезно знать при решении неравенств.

Задача 6. Для каких значений a неравенство

$4^{x+1}+9\cdot 4^{-x}-2(2^{x+1}+3\cdot 2^{-x})\geq a$ выполняется при всех $x\in\mathbb{R}$?

После замены $t=2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$ неравенство примет вид $t^2-2t-12\geq a$, и задача превращается в следующую: при каких значениях a последнее неравенство выполняется при всех t, принадлежащих множеству значений функции $t=2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$. Этим множеством является промежуток $[2\sqrt{6};\ \infty)$. Чтобы его определить, надо найти минимальное значение этой функции и заметить, что при $x\to\infty$ $t\to+\infty$. Так как функция $f(t)=t^2-2t-12$ возрастает на промежутке $t\in[2\sqrt{6};\ \infty)$, то ее минимальное значение равно $f(2\sqrt{6})=12-4\sqrt{6}$, а множество ее значений $E(f)=[12-4\sqrt{6};\ \infty)$. Следовательно, исходное неравенство будет выполняться при всех $x \in(-\infty; \infty)$ для $a \le 4(3-\sqrt{6})$. Еще раз подчеркнем, что функция $\varphi(x)=2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$ отображает R на промежуток $[2\sqrt{6}; \infty)$, а функция $f(t)$ — этот промежуток на промежуток $[12-4\sqrt{6}; \infty)$, откуда и следует результат.

Знание области определения функции также часто помогает решить задачу и избежать возможных ошибок. Проиллюстрируем это на задаче, не содержащей параметра.

Решить неравенство $\dfrac{1}{\log_4 \dfrac{x+1}{x+2}} \le \dfrac{1}{\log_4 (x+3)}$.

Областью его определения является множество $x\in(-3; -2)\cup(-1; \infty)$. Нетрудно показать, что для любого $x\in(-3; -2)$ $\log_4 \dfrac{x+1}{x+2}>0$, а $\log_4(x+3)<0$, а для любого $x\in(-1; \infty)$ $\log_4 \dfrac{x+1}{x+2}<0$, а $\log_4(x+3)>0$. Следовательно, множество решений неравенства — интервал $(-1; \infty)$.

Квадратичная функция

Для решения довольно широкого класса уравнений и неравенств, различных задач необходимо твердое знание квадратичной функции: промежутки возрастания и убывания, ее график, координаты вершины параболы, расположение нулей, промежутки знакопостоянства и другие ее свойства. Решение многих задач часто приводит к решению квадратных уравнений или неравенств: либо сразу, либо после преобразований. Примером может служить рассмотренная выше задача 6. Большая и разнообразная подборка задач, уравнений и неравенств, связанных с квадратичной функцией , содержится в [10]. Приведем еще два примера.

Задача 7. Найдите значения параметра a, при которых все числа из отрезка $x\in[1; 5]$ удовлетворяют неравенству $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$.

Осуществив замену $t=\sqrt{3x+1}$, преобразуем неравенство к виду $(a-2)t^2+2t-3<0$, а так как $1 \le x \le 5 \Leftrightarrow 2 \le t \le 4$, то задача сводится к отысканию всех a, при которых функция $f(t)=(a-2)t^2+2t-3$ принимает только отрицательные значения для всех $t \in[2; 4]$. Если $D=12a-20<0 \Leftrightarrow a<\frac{5}{3}$, то $f(t)<0$ для всех $t \in(-\infty; \infty)$ и, в частности, для $t \in[2; 4]$. При $a=\frac{5}{3}$ неравенство не выполнено, например, при $t=3$. Если же $D>0 \Leftrightarrow a<\frac{5}{3}$, то необходимо требовать выполнения совокупности неравенств для корней трехчлена $f(t)$ при $a\in(\frac{5}{3}; 2)$

$$\frac{-1+\sqrt{3a-5}}{a-2}>4 \quad \text{или} \quad \frac{-1-\sqrt{3a-5}}{a-2}<2.$$

Но ни для одного a из указанного интервала совокупность неравенств решений не имеет. Если $a=2$, неравенство $f(t)<0$ не имеет места ни при одном $t \in[2; 4]$. И, наконец, для любого $a>2$ неравенство не выполнено, например, при $t=2$ $f(2)=4(a-2)+4-3=4a-7>0$. Окончательно имеем $a \in(-\infty; \frac{5}{3})$.

Задача 8. При каких значениях α уравнение $(arc\sin x)^3+(\arccos x)^3=\alpha\pi^3$ имеет решение?

Используя тождество $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ и замену $t=\arcsin x$, получим уравнение $3t^2-\frac{3}{2}\pi t+\frac{\pi^2}{4}=2\alpha\pi^2$. Множество значений функции $f(t)=3t^2-\frac{3}{2}\pi t+\frac{\pi^2}{4}$ для $t \in\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ представляет собой промежуток $\left[\frac{\pi^2}{16}; \frac{7\pi^2}{4}\right]$, так как минимальное значение функция $f(t)$ принимает при $t=\frac{\pi}{4}$, а максимальное при $t=-\frac{\pi}{2}$. Следовательно, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\frac{\pi^2}{16} \le 2\alpha\pi^2 \le \frac{7\pi^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{32} \le \alpha \le \frac{7}{8}.$$

Использование монотонности функции

Далеко не все учащиеся сознательно используют свойства монотонности. Если функция $f(x)$ монотонно возрастает (убывает), то имеет место равносильность уравнений $f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$ и неравенств $f(x) < f(y) \Leftrightarrow x<y$ $(x>y)$. Приведем примеры.

Задача 9. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}\log_{\frac{1}{3}}\left(2|x-a|+2\right)=0$$

имеет ровно три решения.

Данное уравнение преобразуется к виду

$$2^{x^2-2x}\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-a|-1}\log_3\left(2|x-a|+2\right),$$

а если положить $u=x^2-2x$, $v=2|x-a|-1$, то получим уравнение $2^u\log_3(u+3)=2^v\log_3(v+3)$. Так как функция $f(x)=2^t\log_3(t+3)$ монотонно возрастает при $t>-2$ (как произведение двух положительных возрастающих функций), то перейдем к равносильному уравнению $u=v \Leftrightarrow x^2-2x=2|x-a|-1$. Нетрудно показать, что оно имеет ровно три корня для $a\in\left\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\right\}$. Это можно сделать аналитически или с привлечением графических методов, что существенно облегчит нахождение решения. Для этого достаточно изобразить графики функций $y=(x-1)^2$ и $y=2|x-a|$. Значение $a=1$ получим в случае, когда вершины графиков совпадут. Еще два значения a получим в тех случаях, когда один из лучей графика функции $y=2|x-a|$, касается, а другой дважды пересекает параболу $y=(x-1)^2$.

Задача 10. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется при всех $x\in[\pi;2\pi]$.

Замена $t=x^2-ax$ приводит неравенство к виду

$$\frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}<\sin t+\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right) \text{ или } \frac{4}{3}t-\frac{\pi}{3}<\sin t-\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)<\sin t+\frac{4}{3}t.$$

Функция $\varphi(t)=\sin t+\frac{4}{3}t$ возрастает на интервале $t\in(-\infty;\infty)$, так как

$\varphi'(t)=\cos t+\frac{4}{3}>0$ для всех t. Следовательно, можно перейти к равносильному неравенству

$2t-\frac{\pi}{4}<t$. Таким образом, для переменной x имеем неравенство $x^2-ax<\frac{\pi}{4}$, откуда получаем

$a>2\pi-\frac{1}{8}$.

Монотонность функции можно использовать для доказательства единственности решения уравнения. Например, для уравнения $2\log_{x+1}4=x+3$ корень $x=1$ можно угадать. Так как функция $2\log_{x+1}4=\frac{2}{\log_4(x+1)}$ для $x>0$ убывает, а функция $x+3$ возрастает, то найденное решение единственно. Аналогичные соображения можно привлечь для решения уравнения $5^{\frac{x}{2}}+4=3^x$, которое имеет очевидное решение $x=2$. Оно будет единственным, так как функция $5^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{5}\right)^x$ растет медленнее, чем 3^x.

Условия необходимые и достаточные

Часто в задаче с параметром, исходя из ее содержания, можно найти необходимые условия выполнения того или иного соотношения. Это существенно сужает множество возможных значений параметра, а затем проверяется, не является ли данное условие достаточным.

Задача 11. Найдите все значения $\alpha\in\mathrm{R}$, при которых уравнение $\cos x=1+\sin^2(\alpha x)$ имеет единственное решение.

Очевидно, что $x=0$ решение уравнения при любом $\alpha\in\mathrm{R}$. Остается выяснить, при каких значениях α оно не имеет решения, отличного от нулевого. Но проще найти все значения α, при которых уравнение имеет ненулевые решения, и тогда дополнение к множеству этих значений α до множества R даст требуемый ответ. Так как $1\le 1+\sin^2(\alpha x)=\cos x\le 1$, то уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}1+\sin^2(\alpha x)=1,\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2(\alpha x)=0,\\ \cos x=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha x=\pi m, & m\in Z;\\ x=2\pi n, & n\in Z,\end{cases}$$

где m и n целые числа.Если система имеет решение $x\neq 0$, то $\alpha=\frac{m}{2n}$, т.е. $\alpha\in\mathrm{Q}$, то есть рациональность является необходимым условием существования ненулевого решения. Оно будет и достаточным. Действительно, пусть α– произвольное рациональное число ($\alpha=\frac{p}{q}$, $p\in\mathrm{Z}$, $q\in\mathrm{N}$), тогда $x=2\pi q$ ненулевое решение данного уравнения. Следовательно, уравнение имеет единственное решение (x=0) в том и только в том случае, если α– иррациональное число.

Задача 12. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2^{bx}+(a+1)by^2=a^2, \\ (a-1)x^3+y^3=1 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b.

Положив b=0, из первого уравнения получим $a^2=1$, т.е. $a\in\{-1;\ 1\}$. Для a=1 система примет вид

$$\begin{cases} 2^{bx}+2by^2=1, \\ y^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{bx}+2b=1, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{bx}=1-2b, \\ y=1. \end{cases}$$

Последняя система не имеет решения для $b\geq\frac{1}{2}$, следовательно, a=1 не отвечает условию задачи. Для a=–1 получим систему

$$\begin{cases} 2^{bx}=1, \\ -2x^3+y^3=1, \end{cases}$$

решением которой при любом b является (0; 1).

Задача 13. Найдите все значения a, при которых уравнения

$$a(2a-1)\sin^3 x+3\cos^3 x-2a^2\sin x=0,$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3tgx-1)-\log_2(3tgx+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(5-tgx)=1$$

равносильны.

Второе уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(5-tgx)^2}{9tg^2x-1}=2, \\ \dfrac{1}{3}<tgx<5 \end{cases} \Leftrightarrow tgx=1 \quad \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Разделив обе части первого уравнения на $\cos^3x$, приведем его к виду

$$2a^2tgx+atg^3x-3=0.$$

Подставляя в него решения второго уравнения, получим уравнение относительно a:

$$2a^2+a-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in\{-\frac{3}{2};\ 1\}.$$

При a=1 первое уравнение преобразуется к виду

$$tg^3x+2tgx-3=0 \Leftrightarrow (tgx-1)(tg^2x+tgx+3)=0 \Leftrightarrow$$

tgx=1, то есть уравнения равносильны. При a= - $\frac{3}{2}$ первое уравнение приводится к виду $tg^3x-3tgx+2=0$, откуда $tgx=1$ или $tgx=-2$. Следовательно, для a=-$\frac{3}{2}$ уравнения неравносильны.

Использование четности функции

Если рассматривать задачу о существовании единственного решения уравнения $f(x)$=0, где функция $f(x)$ четная, то очевидно, что таким решением может быть лишь x=0. Действительно, если $f(x_0)$=0 для x_0№0, то $f(-x_0)$= $f(x_0)$=0 и, следовательно, $-x_0$ является корнем, отличным от x_0.

Задача 14. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение x^2-2$a$sin(cos$x$)+a^2=0 имеет единственное решение.

Функция в левой части уравнения четна, следовательно, единственным решением может быть лишь x=0, подставляя его в уравнение, приходим к необходимым условиям $a\in\{0;\ 2\sin1\}$. Они же являются и достаточными. Если a=0, то уравнение принимает вид $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$. Если a=2sin1, то имеем уравнение x^2-4sin1sin(cos$x$)+4sin^{2}1=0 $\Leftrightarrow$
x^2-4sin1(sin1-sin(cos$x$))=0.

Оба слагаемых в левой части последнего уравнения неотрицательны, поэтому она равна 0 лишь в случае, когда x=0.

Приведем еще один пример.

Задача 15. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} a(x^4+1)=y+1-|x|, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Если (x_o ; y_o)- решение системы, то (-x_o ; y_o) — также решение системы . Следовательно, если при некотором a система имеет единственное решение, то оно имеет вид (0; y_o). Подставляя его в исходную систему, получаем систему

$$\begin{cases} a=y_0+1, \\ {y_0}^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} a=0, \\ a=2. \end{aligned}\right.$$

Легко видеть (например, из графических соображений), что при a=0 система имеет три решения: (-1; 0), (0; -1), (1; 0).. При a=2 решение единственно (0; 1), так как из первого уравнения следует, что $y=2x^4+|x|+1\geq1$, а из второго $y\leq1$, следовательно, y=1 и x=0.

Следует, однако, отметить, что учащиеся не всегда видят четность или нечетность функции. Можно предложить им доказать, что функции

$$\log_2 \frac{1+\sin x}{\cos x}, \quad \frac{1}{6^x-1}+\frac{1}{2}, \quad \sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

— нечетны, а функции $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$,

$\frac{x}{2^x+1}-\frac{x}{2}$, $\log_3(3^x+1)-\frac{x}{2}$ — четны.

Равноправие основной переменной и параметра

В некоторых задачах удобно на время поменять ролями основную переменную(неизвестную) и параметр. Этот прием может оказаться весьма продуктивным.

Задача 16. Решить уравнение $(x^3-2x)-(x^2+2)a-2a^2x=0$.

Рассматрим его как квадратное уравнение относительно a $2xa^2+(x^2+2)a-(x^3-2x)=0$, из которого $a=\frac{x^2-2}{2x}$ и $a=-x$. Отсюда получаем $x=a\pm\sqrt{a^2+2}$ или $x=-a$. Потери корней при этом не происходит, если $a=0$, то $x\in\{\sqrt{2};-\sqrt{2};0\}$.

Графический метод

На наш взгляд, этот метод является одним из самых эффективных в решении задач с параметрами. Геометрический подход может сразу привести к решению или подскажет путь к его аналитическому отысканию.

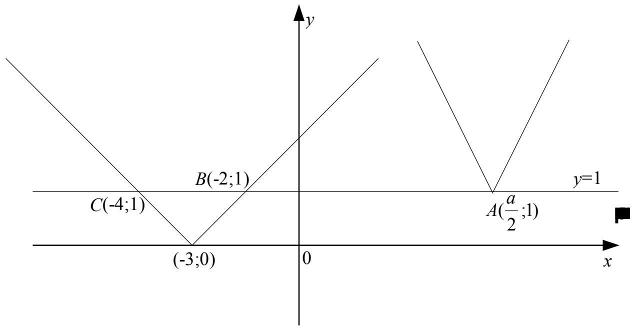
Задача 17. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|a-2x|+1=|x+3|$

а) имеет единственное решение;

б) имеет два решения;

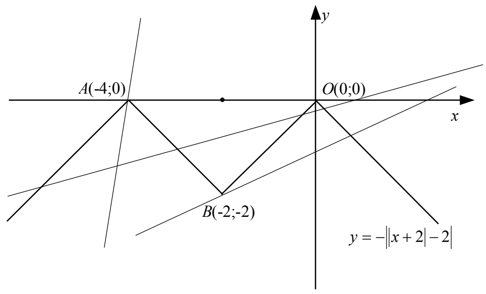
в) не имеет решений.

Как только мы построим графики функций $y=|a-2x|+1$ и $y=|x+3|$, становится ясным, что решение единственно лишь в тех случаях, когда вершина первого графика $A(\frac{a}{2}; 1)$ совпадает с точкой B или точкой C. Это имеет место в случае $a=-4$ или $a=-8$. Если aO(-8; -4), решений нет, а для $a<-8$ и $a>-4$ уравнение имеет два решения. Убедитесь, что поиск решения чисто аналитическим путем существенно сложнее, как и в следующей задаче.



Задача 18. Найдите наименьшее значение выражения $a^2+(b+1)^2$ для тех a и b, при которых уравнение $||x+2|-2|+ax+2a+b=0$ имеет ровно три различных корня.

Построим график функции $y=-||x+2|-2|$. Он имеет три угловые точки $A(-4; 0)$, $B(-2; -2)$ и $O(0; 0)$.



Прямые семейства $y=ax+2a+b$ могут пересекать график функции ровно в трех точках лишь в случае, когда прямая проходит через угловую точку. Для точки A это приводит к соотношению $b=2a$, aO(-1; 0), для точки B $b=-2$, aO(-1; 1), для точки O $b=-2a$, aO(0; 1). Подставляя значение b в выражение $a^2+(b+1)^2$, получаем функцию от a и находим ее наименьшее значение на соответствующем интервале.

Большое число аналогичных примеров можно найти в [6, 8].

Переход к дополнительной задаче

Рассмотрение дополнительной задачи (ее можно назвать противоположной) иногда может упростить решение. Фактически это было сделано в задаче 11. Рассмотрим еще один пример.

Задача 19. Найдите все значения k, при которых уравнение

$$x^2+2(k-1)x+k+5=0$$

имеет хотя бы один положительный корень.

Вместо этой задачи будем искать значения k, при которых уравнение либо не имеет решений, либо оба корня неположительны, что обеспечивается совокупностью условий:

$$\left[\begin{array}{l} D<0, \\ \begin{cases} D\ge 0, \\ k-1\ge 0, \\ k+5\ge 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k^2-3k-4<0, \\ \begin{cases} k^2-3k-4\ge 0, \\ k\ge 1; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

k>-1.

Следовательно, уравнение имеет хотя бы один положительный корень для всех $k\le -1$.

Замена переменных и переформулировка задачи

Замена переменных уже использовалась нами в задачах 6-8, и всякий раз это приводило к новой постановке задачи. Мы хотим еще раз подчеркнуть важность последнего обстоятельства.

Задача 20. Найдите все значения a, при которых неравенство $9^x+(2a+4)3^x+8a+1>0$ выполняется при всех $x\in\mathrm{R}$.

Замена $t=3^x$ преобразует неравенство к виду $t^2+2(a+2)t+8a+1>0$. Неравенство будет выполняться либо для всех $t\in(-\infty;\infty)$, когда $D<0$, либо для $t\in(0;\infty)$ (так как $t>0$ для любого $x\in\mathrm{R}$) в случае $D\ge 0$ и неположительности большего корня, то есть

$$\left[\begin{array}{l} D<0, \\ \begin{cases} D\ge 0, \\ -(a+2)+\sqrt{a^2-4a+3}\le 0; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<a<3, \\ a\in\left[-\frac{1}{8};1\right]\cup[3;\infty); \end{array}\right. \Leftrightarrow a\in\left[-\frac{1}{8};\infty\right].$$

Использование наибольшего и наименьшего значений

Рассмотрим уравнение $f(x)=\varphi(x)$, где $x\in X$, причем $f(x)\ge a$, а $\varphi(x)\le a$, для всех $x\in X$, т.е. $a\le f(x)=\varphi(x)\le a$, тогда исходное уравнение сводится к равносильной системе уравнений $\begin{cases} f(x)=a, \\ \varphi(x)=a. \end{cases}$

С такой ситуацией мы уже сталкивались в задачах 11,14 и 15. Приведем еще два примера.

Задача 21. Решить уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

Так как $1\le(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=(\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}\le 1$, то $\begin{cases} (\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}}=1, \\ (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}=1; \end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{x+a+2}=0, \\ \sqrt{x^2+a^2-6a-5}=0; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-(a+2), \\ 2a^2-2a-1=0, \end{cases}$$

откуда получаем x=$-\frac{5+\sqrt{3}}{2}$ для $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ и x=$\frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ для $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений выражений может помочь и в решении задач с неравенствами.

Задача 22. Найдите все значения a, при которых неравенство $2^{-|x-a^2|}\log_2(4x-x^2-2)\ge 1$ имеет решение.

Учитывая соотношение

$1\le 2^{-|x-a^2|}\le\log_2(4x-x^2-2)\le\log_2(2-(x-2)^2)\le 1$,

переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} 2^{-|x-a^2|}=1, \\ \log_2(4x-x^2-2)=1; \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x-a^2=0, \\ x=2. \end{cases}$$

Следовательно, решением неравенства является $x=2$ для $a\in\left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. Приведем еще пример, в котором оценки играют важную роль.

Задача 23. Докажите, что уравнение $\sin^3 x+\cos x=a$ не имеет решений, если $|a|\ge 1{,}25$.

Нетрудно видеть, что

$$\left|\sin^3 x+\cos x\right|\le\left|\sin^3 x\right|+|\cos x|\le|\sin x|\cdot\left|1-\cos^2 x\right|+|\cos x|$$

$$\le 1-\cos^2 x+|\cos x|=\frac{5}{4}-\left(|\cos x|-\frac{1}{2}\right)^2\le\frac{5}{4},$$

причем равенство может иметь место лишь в случае, когда одновременно $|\cos x|=\frac{1}{2}$ и $|\sin x|=1$, что невозможно. Следовательно, $\left|\sin^3 x+\cos x\right|<\frac{5}{4}$ при всех $x\in\mathrm{R}$.

В небольшой статье нет возможности привести все возможные приемы решения нестандартных задач и даже дать представление о их многообразии. Всем, кто заинтересуется изложенным здесь, советуем обратиться к литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. М:Наука, 1970. 640 с.
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика. Краткое пособие для поступающих в Московский университет. М.:МГУ, 1996. 224 с.
3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. Киев, 1992. 290 с.
4. Чаплыгин В.Ф. Действительные числа в задачах. Ярославль, 1994. 44 с.
5. Чаплыгин В.Ф. Задачи по арифметике и алгебре. Ярославль, 1993. 44 с.
6. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами. Ярославль, 1993. 68 с.
7. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи для вступительных экзаменов по математике. Ярославль, 1991. 140 с.
8. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами по алгебре и анализу (в печати).
9. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решений уравнений и неравенств. М.:МГУ, 1991. 144 с.
10. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. А. И. Прилепко. М.: Высшая школа.1989, 271 с.

Е. И. Смирнов

Теорема о покрытии в математическом анализе

В практической деятельности людей, в искусстве, науке, процессе обучения широко используются отображения целостных объектов (чертеж, рисунок, текст, модель и т.д.). Отображения можно рассматривать двояко: как результат деятельности и как средство достижения цели. Особый класс отображений представляют концептуальные. Объектами для таких отображений являются научные понятия, научные дисциплины, данные науки в целом. С этим классом отображений в большей степени связан процесс обучения математике в вузе.

С проблемами обучения связано много вопросов целостного представления информации, например, представление материала обучения в целостной форме; организация процесса передачи информации; представление результата обучения — совокупности знаний, умений и навыков как целостной системы. Процесс обучения развертывает систему знаний в линейную последовательность, которая растянута во времени. С учетом этой закономерности возникает необходимость строить процесс обучения так, чтобы развертка системы знаний вновь была свернута уже в памяти обучаемого.

Целостность — одно из ведущих свойств восприятия, позволяющее получить целостный образ объекта во всем многообразии и соотношении его свойств и сторон.

На перцептивном уровне познания происходит выделение частей объекта, определение признаков частей, отношений между ними, фиксирование локальных структур, синтез полиструктуры объекта и определение тех интегральных характеристик, которые находятся на основе предварительного анализа объекта. Все эти компоненты, фиксированные с разной степенью полноты, могут быть составляющими целостного образа.

Формирование целостного представления о сложном математическом объекте происходит на основе большого числа вначале слабо организованных сведений. Их организация, структурирование происходят путем анализа и синтеза имеющихся данных. На этом этапе происходит определение частей целого, выявление отношений и связей между ними.

Процесс восприятия математического объекта (понятия, теоремы, доказательства, алгоритма, модели, структуры, пространственной формы и т.п.) в процессе обучения обычно носит развернутый характер: анализируется большое количество самых различных признаков предмета.

По мере развития процесса восприятия (формирование понятия, усвоение знания и т.п.) количество этих признаков сокращается, остаются только самые значимые из них, существенные, которые впоследствии выполняют сигнальную функцию. Происходит формирование так называемых единиц восприятия — сенсорных эталонов, идеальных образов, хранящихся в памяти, с которыми человек сравнивает то, что воспринимает в данный момент. Важно, чтобы они были адекватны особенностям объекта.

Компонент целостности восприятия математических объектов предполагает чувственно воспринимаемую (в основном зрительными анализатора-