зии. Всем, кто заинтересуется изложенным здесь, советуем обратиться к литературе.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Пособие по математике. М:Наука, 1970. 640 с.
2. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика. Краткое пособие для поступающих в Московский университет. М.:МГУ, 1996. 224 с.
3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. Киев, 1992. 290 с.
4. Чаплыгин В.Ф. Действительные числа в задачах. Ярославль, 1994. 44 с.
5. Чаплыгин В.Ф. Задачи по арифметике и алгебре. Ярославль, 1993. 44 с.
6. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами. Ярославль, 1993. 68 с.
7. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи для вступительных экзаменов по математике. Ярославль, 1991. 140 с.
8. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи с параметрами по алгебре и анализу (в печати).
9. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. Нестандартные методы решений уравнений и неравенств. М.:МГУ, 1991. 144 с.
10. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. А. И. Прилепко. М.: Высшая школа.1989, 271 с.


Е. И. Смирнов

# Теорема о покрытии в математическом анализе

В практической деятельности людей, в искусстве, науке, процессе обучения широко используются отображения целостных объектов (чертеж, рисунок, текст, модель и т.д.). Отображения можно рассматривать двояко: как результат деятельности и как средство достижения цели. Особый класс отображений представляют концептуальные. Объектами для таких отображений являются научные понятия, научные дисциплины, данные науки в целом. С этим классом отображений в большей степени связан процесс обучения математике в вузе.

С проблемами обучения связано много вопросов целостного представления информации, например, представление материала обучения в целостной форме; организация процесса передачи информации; представление результата обучения — совокупности знаний, умений и навыков как целостной системы. Процесс обучения развертывает систему знаний в линейную последовательность, которая растянута во времени. С учетом этой закономерности возникает необходимость строить процесс обучения так, чтобы развертка системы знаний вновь была свернута уже в памяти обучаемого.

Целостность — одно из ведущих свойств восприятия, позволяющее получить целостный образ объекта во всем многообразии и соотношении его свойств и сторон.

На перцептивном уровне познания происходит выделение частей объекта, определение признаков частей, отношений между ними, фиксирование локальных структур, синтез полиструктуры объекта и определение тех интегральных характеристик, которые находятся на основе предварительного анализа объекта. Все эти компоненты, фиксированные с разной степенью полноты, могут быть составляющими целостного образа.

Формирование целостного представления о сложном математическом объекте происходит на основе большого числа вначале слабо организованных сведений. Их организация, структурирование происходят путем анализа и синтеза имеющихся данных. На этом этапе происходит определение частей целого, выявление отношений и связей между ними.

Процесс восприятия математического объекта (понятия, теоремы, доказательства, алгоритма, модели, структуры, пространственной формы и т.п.) в процессе обучения обычно носит развернутый характер: анализируется большое количество самых различных признаков предмета.

По мере развития процесса восприятия (формирование понятия, усвоение знания и т.п.) количество этих признаков сокращается, остаются только самые значимые из них, существенные, которые впоследствии выполняют сигнальную функцию. Происходит формирование так называемых единиц восприятия — сенсорных эталонов, идеальных образов, хранящихся в памяти, с которыми человек сравнивает то, что воспринимает в данный момент. Важно, чтобы они были адекватны особенностям объекта.

Компонент целостности восприятия математических объектов предполагает чувственно воспринимаемую (в основном зрительными анализаторами) знаковую математическую модель основных существенных признаков и структуры внутренних и внешних взаимосвязей объекта, при этом необходимость внешних взаимосвязей указывает на общую направленность компонента математического объекта, подчеркивая его целостность.

Моделирование позволяет организовать формирование полноценных умственных действий студентов по III типу ориентировки П.Я.Гальперина и Н.Ф.Талызиной [1], когда предлагается метод анализа математического объекта для самостоятельного составления полной ориентировочной основы действий.

Существенным является то, что, по А.Н.Леонтьеву [2], «актуально сознается только то содержание, которое является предметом целенаправленной деятельности студента, то есть занимает структурное место непосредственно цели внутреннего или внешнего действия в системе той или иной деятельности».

Таким образом, для того, чтобы студенты усвоили математические понятия и целостно овладели ими, необходимо ввести эту целостность в виде знаковой математической модели и сделать ее усвоение целью действий студентов в процессе обучения математике.

**Все сказанное выше позволяет сформулировать** признаки целостного математического объекта**:**

- — наличие основных существенных компонентов объекта;
- — наличие структуры внутренних взаимосвязей;
- — наличие структуры внешних взаимосвязей;
- — интегративность;
- — функциональность;
- — обобщенность.

Нижепредложенный методический прием укрупнения дидактических единиц [3] позволяет оптимизировать структуру нескольких разделов математического анализа, способствуя целостному их усвоению.

**1. Теорема о покрытии.** Тема «Предел функции» является одной из наиболее сложных в математическом анализе ввиду насыщенности логической информацией и многообразия форм представления основных понятий. Теорема о покрытии позволяет соединить воедино ряд практических задач на нахождение предела функции с классификацией самих пределов.

1. Пусть $A$ — непустое бесконечное подмножество $R$ и $a$ — предельная точка (собственная или несобственная) множества $A$ такая, что $a \notin A$. Множество $A$ становится направленным, если для $x \in A$ и $x' \in A$ положить:

$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (|x-a| < |x'-a|) \quad (a \in \mathbf{R}),$$
$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (x' < x) \quad (a = +\infty),$$
$$(x' \prec x) \Longleftrightarrow (x' > x) \quad (a = -\infty).$$

Направленное отношением $\prec$ множество $A$ обозначим $A$ или $(A, a)$ в случае несобственной точки $a$. Множество $A$ в этом случае будем называть допустимым для $a$. Отметим, что если $a \in \mathbf{R}$ и $|x'-a| = \delta > 0$, то $A_{x'} \stackrel{def}{=} \{x \in A : x' \prec x\} = \{x \in A : |x-a| < \delta\}$.

В частности, если $a$ — внутренняя точка множества $A \cup \{a\}$, то, начиная с некоторого $\delta > 0$, получим $A_{x'} = \dot{V}_{\delta}(a) \cap A$, где $\dot{V}_{\delta}(a)$ так называемая проколотая окрестность точки $a$. В случае несобственной точки $a = +\infty$ и $x' = M$ получим

$$A_{x'} = \{x \in A : x > M\} = A \cap V_M(+\infty)$$

а если $a = -\infty$, то для $x' = -N$

$$A_{x'} = \{x \in A : x < -N\} = A \cap V_N(-\infty).$$

Пусть $D(f)$ — область определения функции $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ и $(A, \prec)$ — направленное множество, определяемое предельной точкой $a$ (собственной или несобственной), такое что $A \subset D(f)$.

Число $L$ (собственное или несобственное) называется пределом функции $f$ по направленному множеству $A$, если

$$(\forall V(L))(\exists x' \in A)\forall x(x \succ x' \Longrightarrow f(x) \in V(L)).$$

Если $L$ — предел функции $f$ по множеству $A$, то будем писать $\lim\limits_{A} f(x) = L$ и говорить, что $f$ стремится к $L$ по множеству $A$. В частности, если направленное множество $(A, \prec)$ будет $(A \ni x \to a)$, где $a \in \mathbf{R}$, то

$$(\lim_{A \ni x \to a} f(x) = L) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\forall V(L))(\exists \delta > 0)(\forall x \in A)(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) \in V(L)).$$

Кроме того, если $L = -\infty$, то $V(L) = \{x \in \mathbf{R} : x < -N\}$ и, например,

$$(\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty) \stackrel{def}{\Longleftrightarrow} (\forall N > 0)(\exists M > 0)(\forall x \in A)(x > M \Rightarrow f(x) < -N).$$

Примеры предела функции:

а) предел последовательности. Пусть $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ и $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$. Тогда положим $A=N$ так, что $(\mathbf{N}, \leq)$ — элементарный фильтр и $a = +\infty$, так что $+\infty$ — предельная точка для $N$. Теперь $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = L$, то есть предел последовательности $(f(n))$ — частный случай предела функции.

б) $(\varepsilon, \delta)$ — предел. Этот случай имеет место, когда $a \in \mathbf{R}$, именно:

$$\left(\lim_{A\ni x\to a} f(x) = L\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Покажем, например, что $\lim\limits_{x\to 3}\frac{5x-7}{2x+3} = \frac{8}{9}$; здесь $f(x) = \frac{5x-7}{2x+3}$, $A = D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ — проколотое множество, $a = 3$ и $L = \frac{8}{9}$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to 3}\frac{5x-7}{2x+3} = \frac{8}{9}\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Оценим модуль $\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right|$, считая, что $2 \leq x \leq 4$:

$$\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right| = \frac{1}{9}\left|\frac{29x-87}{2x+3}\right| = \frac{29}{9}\frac{|x-3|}{2x+3} < 4\frac{|x-3|}{2x+3} \leq \frac{4}{7}|x-3| < \varepsilon.$$

Если теперь положить $\delta = \frac{7}{4}\varepsilon$, то как только $|x-3| < \delta$, то $\frac{4}{7}|x-3| < \varepsilon$ и, следовательно, $\left|\frac{5x-7}{2x+3} - \frac{8}{9}\right| < \varepsilon$, что и требовалось установить.

в) пределы на бесконечности. Этот случай имеет место, когда $a = \pm\infty$. Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+4} = \frac{3}{5}$; здесь $f(x) = \frac{3x^2-1}{5x^2+4}$, $A = D(f) = \mathbf{R}$, $a = -\infty$ и $L = \frac{3}{5}$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+4} = \frac{3}{5}\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N > 0)(\forall x \in \mathbf{R})$$

$$\left(x < -N \Longrightarrow \left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon\right).$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Оценим модуль $\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right|$, считая, что $\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| = \frac{17}{5(5x^2+4)} < \frac{4}{5x^2+4} < \frac{4}{5x^2} < \frac{4}{x^2} < \frac{4}{-x} < \varepsilon$.

Если теперь положить $N = \frac{4}{\varepsilon} > 0$, то

$$\left(x < -\frac{4}{\varepsilon}\right) \Longrightarrow \left(\frac{4}{-x} < \varepsilon\right) \Longrightarrow \left(\left|\frac{3x^2-1}{5x^2+4} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon\right),$$

что и требовалось доказать.

г) бесконечные пределы. Этот случай имеет место, когда $L = \pm\infty$. Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = +\infty$; здесь $f(x) = \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$, $A = D(f) = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ — проколотое множество, $a = \frac{1}{2}$ и $L = +\infty$. Тогда

$$\left(\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} = +\infty\right) \Longleftrightarrow (\forall M > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in A)$$

$$\left(\left|x-\frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} > M\right).$$

Пусть $M > 0$. Оценим выражение $\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$, считая, что $0 \leq x \leq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$. Если теперь положить $\delta = \frac{3}{M} > 0$, то $\left(\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{M}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{\left|x-\frac{1}{2}\right|} > M\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2} > M\right)$

что и требовалось доказать.

д) односторонние пределы. Предел функции $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ называется односторонним, если $a = \sup A$ или $a = \inf A$. В частности, односторонними будут пределы $\lim\limits_{A\ni x\to\pm\infty} f(x) = L$. Односторонний предел $\lim\limits_{x\to\sup A} f(x) = L$ называется пределом функции $f$ в точке *a* по множеству *A* и обозначается:

$$\left(\lim_{x\to\sup A} f(x) = L\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{A\ni x\to a-0} f(x) = L\right).$$

Соответственно, односторонний предел $\lim\limits_{x\to\inf A} f(x) = L$ называется пределом функции $f$ справа в точке $a \in \mathbf{R}$ по множеству *A* и обозначается:

$$\left(\lim_{x\to\inf A} f(x) = L\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \left(\lim_{A\ni x\to a+0} f(x) = L\right).$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ есть предел функции слева, а $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$ — предел функции справа. Если $a \in \mathbf{R}$, то вместе с $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x)$ можно рассматривать два односторонних предела $\lim\limits_{A^+\ni x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{A^-\ni x\to a-0} f(x)$, где

$$A^+ = \{x \in A : x > a\}, \quad A^- = \{x \in A : x < a\}.$$

2. Пусть *a* — предельная точка (собственная или несобственная) бесконечного множества $A \subset \mathbf{R}$, направленного транзитивным отношением $\prec$. Если выполнено $a = \sup A$ или $a = \inf A$, то множество *A* назовем сильно направленным для точки *a*. Ясно, что односторонние пределы функции есть пределы по сильно направленным множествам.

**Теорема о покрытии.** *Пусть дано множество* $(A_\alpha)_{\alpha\in S}$ *сильно направленных для точки a множеств такое, что*

а) $A = \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ *— направленное множество с отношением* $\prec$;

б) *для каждого допустимого для точки a множества* $A' \subset \mathbf{R}$ *существует* $\alpha_0 \in S$ *такое, что* $A' \cup A_\alpha$ *сильно направлено соотношением* $\prec$.

*Пусть функция* $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ *такая, что* $a \subset D$. *Тогда для существования предела* $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ *необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы* $\lim\limits_{A_\alpha\ni x\to a} f(x)\ (\alpha \in S)$ *и были равны между собой (L).*

Доказательство проведем, например, для случая $a \in \mathbf{R}$ и $L \in \mathbf{R}$.

Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$ и $A = \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$, где $A_\alpha$ — сильно направленные множества для точки $a$ $(\alpha \in S)$. Если $\varepsilon > 0$ задано, то найдется $\delta > 0$ такое, что из условия $|x - a| < \delta\ (x \in A)$ вытекает: $|f(x) - L| < \varepsilon$. Но так как $A_\alpha \subset A$, то $|f(x) - L| < \varepsilon$ выполнено также и для $|x - a| < \delta\ (x \in A_\alpha)$, где $\alpha \in S$. Последнее означает, что $\lim\limits_{A_\alpha\ni x\to a} f(x) = L\ (\alpha \in S)$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{A_\alpha\ni x\to a} f(x) = L\ (\alpha \in S)$ и $A = \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$ так, что а) и б) теоремы выполнены. Доказательство достаточности проведем методом от противного. Предположим, что $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) \neq L$, то есть существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдется $x_\delta \in A$ такое, что $|x_\delta - a| < \delta$ и тем не менее $|f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon$:

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x_\delta \in A)(|x_\delta - a| < \delta \Longrightarrow |f(x_\delta) - L| \geq \varepsilon).$$

Рассмотрим множество $A' = \{x_\delta \in A : \delta > 0\}$. Тогда множество $A'$ допустимое для точки $a \subset \mathbf{R}$ и, следовательно, в силу условия б) теоремы найдется $\alpha_0 \in S$ такое, что $A' \cap A_{\alpha_0}$ сильно направленное множество, то есть, например, $a = \sup(A' \cap A_{\alpha_0})$. Тем самым, для $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ в силу характеристического свойства граней найдется последовательность $(x_{\delta_n})$ или просто $(x_n)$ такая, что $x_n \in A_{\alpha_0}$ и $|x_n - a| < \frac{1}{n}\ (n \in \mathbf{N})$. Но так как $\lim\limits_{A_{\alpha_0}\ni x\to a} f(x) = L$, то для указанного ранее $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что $|f(x) - L| < \varepsilon$ для всех $x \in A_{\alpha_0}$ и таких, что $|x - a| < \delta_0$. Более того, $|x_n - a| < \frac{1}{n} < \delta_0$ для всех $n > N$ и, следовательно, $|f(x_n) - L| < \varepsilon\ (n > N)$. Однако в силу предположения должно выполняться неравенство $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$, что невозможно. Таким образом, $\lim\limits_{A\ni x\to a} f(x) = L$, что и требовалось доказать.

Следствия теоремы о покрытии:

**2.1. Критерий равенства односторонних пределов.** Для того, чтобы существовал предел функции $f$ в точке $a \in \mathbf{R}$ по проколотому множеству *A*, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны односторонние пределы функции $f$:

$$\left(\lim_{A\ni x\to a} f(x) = L\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{A\ni x\to a+0} f(x) = L \wedge \lim_{A\ni x\to a-0} f(x) = L\right)$$

Действительно, достаточно рассмотреть множества $A^+$ и $A^-$ такие, что $A = A^+ \cup A^-$, и воспользоваться теоремой о покрытии.

**2.2. Характеристическое свойство предела функции.** Для того, чтобы существовал предел функции $f$ в точке $a$ (собственной или несобственной) по множеству *A*, необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $(x_n)$ такой, что $x_n \to a$, $x_n \to a$, $x_n \in A\ (n \in \mathbf{N})$, сходились последовательности $f(x_n)$.

Действительно, полагая $\alpha = (x_n)$, где $x_n \to a$, $x_n \in A^+$ или $x_n \in A^-(n \in \mathbf{N})$, и $A_\alpha = \Im(x_n)$, получим $A = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{I}(x_\alpha)$. Если теперь $A'$ — допустимое множество для точки $a$, то в силу секвенциальности $\mathbf{R}$ легко найти $\alpha = (x_n)$ такую, что $\mathfrak{I}(x_n) \subset A'$. Остается воспользоваться теоремой о покрытии.

**2. 3. Принцип покрытия для последовательностей.** Пусть $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ — последовательность и $f|_{A_1}, f|_{A_2}, \dots, f|_{A_m}$ — подпоследовательности такие, что $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$. Тогда для того, чтобы последовательность $f$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $f|_{A_i}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ и имели один и тот же предел.

Доказательство сразу следует из теоремы о покрытии, если положить $A = \mathbf{N}$ и $S = \{1, 2, \dots, m\}$. Однако с дидактической точки зрения представляет интерес и непосредственное доказательство следствия 3. Проведем его.

Необходимость. Пусть $f(n) = x_n$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $f|_{A_1}(n) = x_{n_k^1}$, $f|_{A_2}(n) = x_{n_k^2}, \dots, f|_{A_m}(n) = x_{n_k^m}$ — подпоследовательности $(x_n)$. Тогда в силу свойства подпоследовательности получим $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^1} = a$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^2} = a, \dots, \lim_{k\to\infty} x_{n_k^m} = a$.

Достаточность. Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^i} = a$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$, причем $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$, где $p$ — некоторое фиксированное натуральное число и $A_i = \{n_1^i, n_2^i, \dots, n_k^i, \dots\}$ — бесконечное подмножество $\mathbf{N}$, определяющее подпоследовательность $(x_{n_k^i})$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся номера $k_i \in \mathbf{N}$ такие, что для всех $k > k_i$ выполнены неравенства $|x_{n_k^i} - a| < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Если теперь положить $N = \max\{p, n_{k_1}^1, n_{k_2}^2, \dots, n_{k_m}^m\}$, то для $n_k^i > N$ $(i = 1, 2, \dots, m, k > \max\{k_1, k_2, \dots, k_m\})$ все последние неравенства выполнены одновременно, причем если $n > N$, то $n > p$ и, следовательно, существуют $i$ и $k$ такие, что $n = n_k^i$. Таким образом, $|x_n - a| = |x_{n_k^i}| < \varepsilon$ для всех $n > N$, что и требовалось доказать.

Принцип покрытия для последовательностей можно применить по крайней мере в трех ситуациях. Во-первых, пусть требуется найти $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n-1}}$; здесь $x_n = \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n-1}}$. Пусть

$$x_{2k} = \frac{(-2)^{2k} + 3^{2k}}{(-2)^{2k+1} + 3^{2k+1}} \text{ и } x_{2k-1} = \frac{(-2)^{2k-1} - 3^{2k-1}}{(-2)^{2k} + 3^{2k}} \; (k \in \mathbf{N}).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = \lim_{k\to\infty} \frac{4^k + 9^k}{-\frac{1}{2}4^k + 3 \cdot 9^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + \left(\frac{4}{9}\right)^k}{3 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^k} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}4^k - \frac{1}{3}9^k}{4^k + 9^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^k}{1 + \left(\frac{4}{9}\right)^k} = \frac{1}{3}.$$

Полагая $A_1 = \{2, 4, 6, \dots, 2k, \dots\}$ и $A_2 = \{1, 3, 5, \dots, 2k-1, \dots\}$, получим $\mathbf{N} = A_1 \cup A_2$ и, следовательно, в силу принципа покрытия существует предел последовательности $(x_n)$, равный $\frac{1}{3}$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n-1} + 3^{n-1}} = \frac{1}{3}.$$

Во-вторых, принцип покрытия применим для нахождения всех пределов подпоследовательностей $(x_n)$. Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^1} = a_1$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^2} = a_2$, ... , $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^m} = a_m$, $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \supset \{n \in \mathbf{N} : n > p\}$ и $(x_{n_k^*})$ — некоторая сходящаяся подпоследовательность $(x_n)$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^*} = a$ и $A = \{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, \dots\}$. Тогда найдется номер $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ такой, что множество $A \cap A_i = \{n_1^*, n_2^*, \dots, n_k^*, \dots\}$ бесконечное и, следовательно, в силу принципа покрытия $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^*} = a$ и $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^*} = a_i$ так, что $a = a_i$. Другими словами, при сформулированных условиях пределы подпоследовательностей $(x_n)$ могут быть лишь $a_1, \dots, a_m$.

В-третьих, принцип покрытия можно применить для доказательства несуществования предела последовательности. В самом деле, пусть для последовательности $(x_n)$ нашлись две подпоследовательности $(x_{n_k})$ и $(x_{n_k'})$ такие, что $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a_1$, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k'} = a_2$ и $a_1 \neq a_2$. Тогда, если предположить, что существует $\lim_{k\to\infty} x_n = a$, то в силу принципа покрытия получим

$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n'_k} = a'$, что невозможно. Значит, последовательность $(x_n)$ не имеет предела. Например, для последовательности $\left(x_n = \sin n\frac{\pi}{2}\right)$ такими подпоследовательностями будут $(x_{4k-1} = -1)$ и $(x_{4k-3} = 1)$, так что последовательность $\left(\sin n\frac{\pi}{2}\right)$ расходящаяся.

Приведенные выше приемы моделирования учебной деятельности способствуют профессионализации процесса обучения и выработке потребности и навыков в планировании, постановке стратегических и тактических целей в изучении разделов математического анализа.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гальперин П.Я. Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий // Доклады АПН РСФСР. 1958. N2. С.75–79.
2. Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность. М.: ИПЛ, 1975. 304с.
3. Эрдниев П.М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения. Ч.1. М.: Просвещение, 1992. 175с.
4. Смирнов Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1997. 323 с.


**А. Д. Кондратюк**

# ЭЛЕКТРЕТНЫЕ СВОЙСТВА ДИЭЛЕКТРИКОВ


*Принято считать, что диэлектрики способны поляризоваться в электрическом поле, но не сохраняют остаточный заряд после снятия внешнего электрического поля и поэтому не создают в окружающем пространстве электрического поля.*

*В статье приводится информация о диэлектриках, которые сохраняют остаточную поляризацию (электреты) при определённом режиме поляризации.*

*Статья предназначена для практических учителей. Материал может быть использован при изучении темы «Проводники и диэлектрики в электрическом поле», а также в более подробном изложении при углублённом изучении темы в факультативном курсе 10 класса «Электрические свойства твёрдых тел».*


Известно, что к диэлектрикам относят вещества, плохо проводящие электрический ток по сравнению с проводниками. При помещении во внешнее электрическое поле диэлектрики поляризуются: результирующий электрический момент диэлектрика становится отличным от нуля, на поверхности диэлектрика образуются связанные заряды. При снятии внешнего поля заряды перераспределяются.

За последние годы в научной и популярной литературе появилось немало работ, посвящённых электретному состоянию вещества.

Электреты — это диэлектрики, обладающие свойством сохранять электрическую поляризацию, вызванную внешним электрическим полем. Такая поляризация называется остаточной. Поэтому, говоря об электрете, можно сказать, что это постоянно наэлектризованный диэлектрик, несущий на одной стороне положительный заряд, а на другой — отрицательный и способный создавать электрическое поле в окружающем его пространстве.

Такое состояние вещества было впервые открыто японским физиком М. Егучи в 1922 году. История открытия электретов есть в конечном счёте история поиска электрического аналога постоянного магнита. На возможность создания электрического аналога постоянного магнита указывал в конце прошлого столетия английский физик О. Хевисайд, предположивший, что, подобно постоянным магнитам, в природе должны существовать «постоянно заполяризованные диэлектрики», которые он назвал электретами. Однако с самого начала было ясно, что эта аналогия ограничена отсутствием в природе свободных магнитных зарядов, в то время как свободные электрические заряды существуют. Это хорошо известное обстоятельство, принятое во внимание в теории Максвелла, приводило к тому, что внутреннее электрическое поле, созданное в диэлектрике искусственно или существующее в нём спонтанно, будет экранироваться свободными электрическими зарядами, существующими в самом диэлектрике или вне его, в результате чего такой заряженный диэлектрик, или «электрет», должен разряжаться. Это соображение является существенным при исследовании природы устойчивости электретов.

Электретные свойства обнаружены во многих диэлектрических материалах: полимерах, керамике, фторопластах, в некоторых монокристаллах.