А. И. Григорьев,
С. О. Ширяева, В. А. Коромыслов

К методике вывода условий трансверсальности

Вариационные принципы занимают важное место в естествознании в силу их универсальности. Более того, область их применимости распространилась за рамки естественнонаучных дисциплин, охватывая и общественно-исторические, экономические, кибернетические явления. Вариационный принцип с успехом используется в философских науках, в частности, для обоснования позитивистского принципа «экономии мышления», принципов детерминизма, категорий целесообразности и оптимальности [1]. В этой связи значение вариационных принципов вышло за пределы чистой математики, и встает проблема методического обеспечения процесса преподавания этой дисциплины на основе менее абстрактных посылок, чем это традиционно делается для чисто математической аудитории (см., например, [2-7].

В нижеследующем изложении проводится вывод условий трансверсальности для определения экстремальных пространственных кривых, концы которых свободно скользят по трехмерным поверхностям, адаптированный к нуждам физики. Предлагаемый вывод основан на использовании понятий векторного анализа, то есть дисциплины, появившейся в рамках математической теории поля. Он более нагляден для физической аудитории по сравнению с традиционным для классических учебников по вариационному исчислению [2-7].

1. Формулировка задачи

Пусть даны две трехмерные поверхности $\Phi(x,y,z)=x-\varphi(y,z)$.

Среди трехмерных кривых, получающихся при пересечении поверхностей $y=y(x)$ и $z=z(x)$, непрерывных вместе со своими производными до второго порядка включительно, имеющих начало на поверхности $\Phi(x,y,z)=0$, требуется найти кривую, дающую экстремум функционалу

$$\int_{x_0}^{x_*} F(x,y,z,\frac{\partial y}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x})dx. \tag{1}$$

Как известно [2-7], искомые двухмерные поверхности $y=y(x)$ и $z=z(x)$, пересечением которых задается трехмерная экстремальная кривая, должны удовлетворять системе уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dz}{dx}\right)}=0; \tag{2}$$

Эти уравнения необходимо дополнить граничными условиями пересечения искомой кривой с поверхностями $\Phi(x,y,z)=0$ и $\Psi(x,y,z)=0$, по которым свободно перемещаются ее концевые точки. Эти граничные условия и называются условия трансверсальности.

2. Вывод условий трансверсальности

Запишем выражение для общей формы первой вариации функционала (1) с учетом уравнений Эйлера (2) для обоих концов экстремальной кривой [2-7].

$$+\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}\cdot\delta y+\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}\cdot\delta z\Bigg|_{x=x_0}=0. \tag{3}$$

$$+\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}\cdot\delta y+\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}\cdot\delta z\Bigg|_{x=x_*}=0. \tag{4}$$

В этих выражениях δx, δy, δz есть проекции вариации радиус — вектора $\delta\vec{r}=\delta x\cdot\vec{n}_x+\delta y\cdot\vec{n}_y+\delta z\cdot\vec{n}_z$, определенного в окрестности концов экстремальной кривой, то есть на поверхностях $\Phi(x,y,z)=0$ и $\Psi(x,y,z)=0$. Следовательно, вектор $\delta\vec{r}$ в окрестности начала экстремальной кривой лежит в плоскости касательной к поверхности $\Phi(x,y,z)=0$, а в окрестности конца экстремальной кривой он лежит в плоскости, касательной к поверхности $\Psi(x,y,z)=0$.

Выражения (3) и (4) по своей структуре представляют собой скалярное произведение вектора вариации радиус вектора $\delta\vec{r}$ на некий ортогональный к $\delta\vec{r}$ вектор B, имеющий проекции на оси декартовой системы координат:

$$B_x=F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)};$$
$$B_z=\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)} \tag{5}$$

С другой стороны, в окрестности начала экстремальной кривой всегда можно построить вектор, ортогональный к $\delta\vec{r}$. Этот вектор есть градиент от уравнения поверхности $\Phi(x,y,z)=0$:

$$grad\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{n}_x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{n}_y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{n}_z \tag{6}$$

Поскольку введенный нами вектор B и $grad\Phi$ параллельны, то для их проекций должно выполняться соотношение:

$$\frac{B_x}{\partial\Phi/\partial x}=\frac{B_y}{\partial\Phi/\partial y}=\frac{B_z}{\partial\Phi/\partial z} \tag{7}$$

Аналогично в окрестности конца экстремальной кривой получим:

$$\left[\frac{F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}}{\frac{\partial\Psi}{\partial x}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}}{\frac{\partial\Psi}{\partial y}}=\frac{\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}}{\frac{\partial\Psi}{\partial z}}\right]_{x=x_*} \quad (8)$$

Из соотношений (7), (8) и получаются искомые граничные условия или условия трансверсальности в виде:

$$\dot{F}_y+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left\{F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}\right\}\Bigg|_{x=x_0}=0$$

$$\dot{F}_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left\{F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}\right\}\Bigg|_{x=x_0}=0$$

$$\dot{F}_y+\frac{\partial\psi}{\partial y}\left\{F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}\right\}\Bigg|_{x=x_*}=0$$

$$\dot{F}_z+\frac{\partial\psi}{\partial z}\left\{F-\frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}-\frac{dz}{dx}\frac{\partial F}{\partial(dz/dx)}\right\}\Bigg|_{x=x_*}=0 \quad (9)$$

При записи этих условий было учтено, что:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=1;\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\Phi}{\partial y};\ \frac{\partial\Psi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

3. Решения системы (2) будут содержать четыре произвольных постоянных. Кроме того, у нас имеются две неизвестные абсциссы x и x_* пересечения экстремальной кривой с поверхностями $\Phi(x,y,z)=0$ и $(x,y,z)=$. Таким образом, определению подлежат шесть констант. Для их нахождения четыре условия трансверсальности (9) следует дополнить условиями:

$$\Phi(x_0,y_0,z_0)=0;\ \Psi(x_*,y_*,z_*)=0,$$

где y_0,z_0,y_*,z находятся из экстремальных поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В.А. Экстремальные принципы в естествознании и их философское содержание. Л.: Изд. ЛГУ, 1977. 231 с.
2. Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В. Вариационное исчисление. Л.: Изд. КУБУЧ. 1933. 204 с.
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с.
5. Буслаев В.С. Вариационное исчисление. Л.: Изд. ЛГУ, 1980. 287 с.
6. Коша А. Вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 1983. 280 с.
7. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. М.: Мир, 1985. 590 с.