Н. В. Малай

Обтекание слабо деформированной капли вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса

Несмотря на то, что в научной литературе имеется большое количество публикаций, посвященных исследованию механики деформируемых капель, например [1-3], однако в настоящее время отсутствуют точные данные о влиянии формы поверхности капли на ее гидродинамическое сопротивление. Особенно это относится к описанию движения слабо деформируемых капель и жидких эллипсоидов. Деформация капли может возникнуть при движении ее в вязкой жидкости. В данной статье рассматривается этот случай. Г. Бреннером в работе [2] был разработан математический метод для описания движения слабо деформированной твердой сферы. Используя его, можно рассмотреть движение слабо деформированной капли. В приближении Стокса получено обобщение формулы Адамара-Рыбчинского на случай стационарного обтекания слабо деформированной капли вязкой несжимаемой жидкостью. Решение находилось в виде разложения по сферическим функциям. Показано, что на гидродинамическую силу оказывают влияние нулевая и вторая гармоника. Получено приближенное выражение для гидродинамической силы сопротивления сфероидальной капли.

Рассматривается безынерциальное стационарное обтекание слабо деформированной капли однородным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Поверхностное натяжение, действующее на поверхности раздела двух несмешиваемых жидкостей, стремится сохранить сферическую форму и противодействует сдвиговым напряжениям, стремящимся деформировать ее. Если напряжения со стороны внешнего потока, имеющие порядок $\mu_e U/R_0$ (μ_e — вязкость внешней жидкости, U — скорость капли, R_0 — средний радиус кривизны), сравнимы с капиллярными силами, то капля имеет форму слабо деформированной сферы. Учитывая, что капиллярные силы $\sim 2\sigma/R_0$, каплю можно считать слабо деформированной при выполнении условия $A \le 1$

$$A \approx \frac{U\mu_e}{\sigma}. \qquad (1)$$

Для капель, падающих в жидкости вязкостью $\mu_e \sim 10^{-1}$ кг/м·с с коэффициентом межфазного натяжения $\sigma \sim 10^{-2}$ Н/м, условие $A \le 1$ выполняется при $U < 10$ см/с, что соответствует требованию малых чисел Рейнольдса.

Кроме того, форма поверхности капли существенно зависит от отношения вязкостей $(\eta = \mu_i/\mu_e)$. Численные оценки, проведенные в работе [4], показали, что при $\eta \le 0.5$ форма капли существенно влияет на ее сопротивление. Это влияние особенно заметно при малой вязкости жидкости внутри капли.

Таким образом, в работе рассматривается движение слабо деформированной капли при малых числах Рейнольдса под действием некоторой силы (гравитационной, электрофоретической и т.п.).

Предположим, что поверхность деформированной капли можно описать при помощи уравнения [5] $r = R[1 + \varepsilon f(\theta, \varphi)]$, где r, θ, φ — сферические координаты с началом в центре недеформированной сферы радиуса $r = R$; $|\varepsilon| << 1$ — малый безразмерный параметр, а $f(\theta, \varphi)$ — произвольная функция углового положения, имеющая порядок $0(1)$ по отношению к параметру ε. Параметр s является искусственным параметром, неотделимым от функции $f(\theta, \varphi)$. Он введен для того, чтобы указывать на степень приближения получаемых в итоге результатов.

Любую однозначную функцию переменных O и φ можно разложить в ряд по сферическим функциям $Y_k(\theta,\varphi)$ [6,7], т.е. при этом

$$Y_k(\theta,\varphi) = A_k^0 P_k(x) + \sum_{m=1}^{k} (A_k^m \cos m\varphi + B_k^m \sin m\varphi) P_k^m(x),$$

где A_k^m и B_k^m — постоянные коэффициенты, определяемые формулами

$$A_k^m = \frac{1}{\| Y_k^m \|^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) P_k^m(x) \cos m\varphi \sin\theta \, d\theta d\varphi,$$

$$B_k^m = \frac{1}{\| Y_k^m \|^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta,\varphi) P_k^m(x) \sin m\varphi \sin\theta \, d\theta d\varphi,$$

$\| Y_k^m \|^2 = \frac{2\pi \varepsilon_m}{(2k+1)} \frac{(k+m)!}{(k-m)!}$, $P_k(x), P_k^m(x)$ — полиномы и присоединенные полиномы Лежандра [6,7], $x = \cos\theta$, $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m>0 \\ 2, & m=0 \end{cases}$.

Следовательно, поверхность слабо деформированной сферы можно записать в виде

$$r = R\,[1 + \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(\theta,\varphi)].$$

В общем случае движение слабо деформированной частицы будет как поступательным, так и вращательным. Вследствие линейности уравнений гидродинамики эти два движения можно рассматривать по отдельности. В работе рассматривается поступательное движение.

Удобно ввести систему отсчета, связанную с центром движущейся гидрозольной частицы, и задача сводится к анализу обтекания слабо деформированной капли бесконечным плоскопараллельным потоком со скоростью U_∞. ($U_\infty = -U$, где U — скорость упорядоченного движения слабо деформированной капли).

В рамках сформулированных допущений в квазистационарном приближении уравнения, описывающие распределения массовой скорости U и давления P вне и внутри капли, запишутся в виде [8]

$$\mu_e \Delta \mathbf{U}_e = \nabla P_e, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_e = 0, \tag{7}$$

$$\mu_i \Delta \mathbf{U}_i = \nabla P_i, \quad \operatorname{div} \mathbf{U}_i = 0. \tag{8}$$

Систему уравнений (7)—(8) будем решать со следующими граничными условиями [5] на

$$S_d, \; U_r^e = U_r^i = 0, \; U_\theta^e = U_\theta^i, \; \mu_e\left(\frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^e}{r}\right) = \mu_i\left(\frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r^i}{\partial \theta} - \frac{U_\theta^i}{r}\right), \tag{9}$$

$$r \to \infty, \quad \mathbf{U} = U_\infty \cos\theta \, \mathbf{e}_r - U_\infty \sin\theta \, \mathbf{e}_\theta, \quad P_e = P_\infty, \tag{10}$$

$$r \to 0, \quad |\mathbf{U}_i| \neq \infty, \; P_i \neq \infty. \tag{11}$$

Здесь через S_d обозначена поверхность деформированной капли; индекс «е» и «i» относятся соответственно к области вне капли и внутри ее, а индексом «∞» обозначены значения физических величин, характеризующих вязкую среду на бесконечности в невозмущенном потоке; $U_\infty = |\mathbf{U}_\infty|$ — величина скорости набегающего потока; U_r и U_θ — нормальная и касательная компоненты массовой скорости; $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — единичные векторы сферической системы координат.

В граничных условиях (9) на поверхности деформированной капли учтены: условия непроницаемости и непрерывности для нормальных и касательных скоростей, непрерывности касательных составляющих тензора напряжений. На большом расстоянии от капли ($r \to \infty$) справедливы граничные условия (10), а конечность физических величин при $r \to 0$ учтена в (11).

Набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому поля скорости и давления можно разложить в ряды по ε

$$\mathbf{V}_e = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \, \mathbf{V}_e^{(n)}, \quad P_e = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_e^{(n)}, \tag{12}$$

$$\mathbf{V}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \, \mathbf{V}_i^{(n)}, \quad P_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_i^{(n)}. \tag{13}$$

Подставляя (12)-(13) в (7)-(8) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε, получаем, что каждое из полей возмущений $(\mathbf{V}_e^{(n)}, P_e^{(n)}, \mathbf{V}_i^{(n)}, P_i^{(n)})$ удовлетворяет уравнениям Стокса

$$\mu_e \Delta V_e^{(n)} = \nabla P_e^{(n)}, \quad \operatorname{div} V_e^{(n)} = 0,$$
$$\mu_i \Delta V_i^{(n)} = \nabla P_i^{(n)}, \quad \operatorname{div} V_i^{(n)} = 0.$$

с граничными условиями

$$r = \infty, \ V_e^{(o)} = U_\infty, \quad V_e^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$P_e^{(o)} = P_\infty, \quad P_e^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$r \to 0, \ |V_i^{(n)}| \neq \infty, \quad V_i^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$P_i^{(o)} = P_o^i, \quad P_i^{(n)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При нахождении граничных условий для полей возмущений на поверхности деформированной частицы поступим следующим образом. Разложим поле скорости $U_e^{(n)}$ в ряд Тейлора относительно точки $r = R$

$$U_e^{(n)} = U_e^{(n)}\Big|_{r=R} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{(r-R)^\lambda}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda}{\partial r^\lambda} (U_e^{(n)})\Big|_{r=R}.$$

Учитывая, что $r - R = \varepsilon R f(\theta, \varphi)$, выражение для U_e принимает вид

$$U_e = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n [\, U_e^{(n)} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{R^\lambda}{\lambda 1} \varepsilon^\lambda f^\lambda(\theta, \varphi) \frac{\partial^\lambda}{\partial r^\lambda} (U_e^{(n)})] \quad \text{при } r = R,$$

или, группируя вместе члены при одинаковых степенях ε, получаем

$$U_e = U_e^{(o)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [\, U_e^{(n)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{R^\lambda}{\lambda!} f^\lambda(\theta, \varphi) \frac{\partial^\lambda}{\partial r^\lambda} (U_e^{(n-\lambda)})] \quad \text{при } r = R. \quad (14)$$

Аналогично можно записать и для скорости U_i. Таким образом, выражения для нормальных и касательных составляющих скоростей вне и внутри капли в сферической системе координат имеют вид

$$V_r^k = V_r^{k(o)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [V_r^{k(n)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{f^\lambda(\theta, \varphi)}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda V_r^{k(n-\lambda)}}{\partial y^\lambda}], \quad y = r/R \quad \text{при } r = R,$$
$$V_\theta^k = V_\theta^{k(o)} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n [V_\theta^{k(n)} + \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{f^\lambda(\theta, \varphi)}{\lambda!} \frac{\partial^\lambda V_\theta^{k(n-\lambda)}}{\partial y^\lambda}] \quad (k = e, i) \text{ при } r = R. \quad (15)$$

Подставляя (15) в граничные условия (9), получаем, что граничным условиям на деформированной сфере можно удовлетворить вплоть до любого порядка по ε. Начиная с поля нулевого порядка, каждое поле более высокого порядка можно последовательно получить путем удовлетворения соответствующим граничным условиям на поверхности недеформированной капли. Задача может быть в принципе решена вплоть до любого порядка по ε. Мы ограничимся вычислением только поправки первого порядка к решению, полученному Адамаром и Рыбчинским [5].

Главный член разложения $(U_e^{(o)}, U_i^{(o)}, P_e^{(o)}, P_i^{(o)})$ является, конечно, решением Адамара-Рыбчинского для обтекания недеформированной капли. Это решение имеет вид [5]

$$U_r^{e(o)} = U_\infty \cos\theta (1 + \frac{A_1}{y^3} + \frac{A_2}{y}), \ U_\theta^{e(o)} = -U_\infty \sin\theta (1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3}),$$
$$P_e^{(o)} = P_\infty + \frac{\mu_e U_\infty}{R y^2} A_2 \cos\theta, \ U_r^{i(o)} = U_\infty \cos\theta (A_3 + A_4 y^2),$$
$$U_\theta^{i(o)} = -U_\infty \sin\theta (A_3 + 2A_4 y^2), \ P_i^{(o)} = P_o + 10 \frac{\mu_i U_\infty}{R} A_4 y \cos\theta, \quad (17)$$

где

$$A_2 = -\frac{3}{2} \frac{1 + \frac{2}{3}\delta}{1 + \delta}, \ A_1 = \frac{1}{2(1+\delta)}, \ A_3 = -A_4, \ A_4 = \frac{\delta}{2(1+\delta)}, \ \delta = \frac{\mu_e}{\mu_i}.$$

Поскольку мы ограничиваемся первой поправкой по ε, то с учетом (17) из(9) получаем

$$U_r^{e(1)} = U_\infty x Y_k (\frac{A_2}{y^2} + \frac{3}{y^4} A_1), \quad U_r^{i(1)} = -U_\infty 2x Y_k y A_4,$$
$$U_\theta^{e(1)} - U_\theta^{i(1)} = -U_\infty Y_k \sqrt{1-x^2} (4yA_4 + \frac{A_2}{2y^2} - \frac{3A_1}{2y^4}),$$
$$\mu_e [\frac{\partial U_\theta^{e(1)}}{\partial y} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{y} \frac{\partial U_r^{e(1)}}{\partial x} - \frac{U_\theta^{e(1)}}{y} - Y_k \sqrt{1-x^2} (\frac{A_2}{2y^3} - \frac{21}{2y^5} A_1) +$$
$$+ x\sqrt{1-x^2} \frac{\partial Y_k}{\partial x} (\frac{A_2}{y^3} + \frac{3A_1}{y^5})] = \mu_i [\frac{\partial U_\theta^{i(1)}}{\partial y} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{y} \frac{\partial U_r^{i(1)}}{\partial x} - \frac{U_\theta^{i(1)}}{y} -$$
$$- 2Y_k \sqrt{1-x^2} A_4 - 2x\sqrt{1-x^2} \frac{\partial Y_k}{\partial x} A_4]. \quad (18)$$

и соответственно

$$U_e^{(1)} = 0 \text{ при } r = \infty, \quad U_i^{(1)} = 0 \quad \text{при } r \to 0. \quad (19)$$

Решая систему (18)-(19), можно найти явный вид компонентов скорости для первого приближения

$$U_r^{e(1)} = U_\infty x Y_k (\frac{A_2}{y^2} + \frac{3}{y^4} A_1), \ U_\theta^{e(1)} = U_\infty Y_k \sqrt{1-x^2} (\frac{3A_1}{2y^4} - \frac{A_2}{2y^2}), \quad (20)$$

$$U_r^{i(1)} = -2U_\infty x Y_k y A_4, \quad U_\theta^{i(1)} = 4U_\infty y \sqrt{1-x^2} A_4, \ x = \cos\theta. \quad (21)$$

Обозначим через $\mathbf{H}_e^{(1)}$ и $\mathbf{H}_i^{(1)}$ величину скорости на поверхности капли, т.е. $\mathbf{H}_e^{(1)}(\theta,\varphi) = \mathbf{U}_e^{(1)}(R,\theta,\varphi)$, $\mathbf{H}_i^{(1)}(\theta,\varphi) = \mathbf{U}_i^{(1)}(R,\theta,\varphi)$.

С учетом (20)-(21) имеем

$$\mathbf{H}_e^{(1)} = xY_k(A_2+3A_1)\,\mathbf{e}_r + Y_k\sqrt{1-x^2}\left(\frac{3}{2}A_1-\frac{A_2}{2}\right)\mathbf{e}_\theta, \quad (22)$$

$$\mathbf{H}_i^{(1)} = -2U_\infty xY_k A_4\,\mathbf{e}_r + 4U_\infty\sqrt{1-x^2}\,A_4\,\mathbf{e}_0 \quad (23)$$

При дальнейшем решении задачи воспользуемся методом, разработанным Дж. Хаппелем и Г. Бреннером [5]. Общее решение уравнения Стокса в сферической системе координат, полученное Г. Ламбом, в векторной форме имеет следующий вид [5]

$$\mathbf{V} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\nabla F_n + \frac{(n+3)r^2}{2\mu(n+1)(2n+3)}\nabla P_n - \frac{n}{\mu(n+1)(2n+3)}P_n\,\mathbf{r}\right), \quad (24)$$

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n\,, \quad (25)$$

где $F_n = F_n(x,y,z)$, $P_n = P_n(x,y,z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, ∇ — трехмерный оператор набла.

Нормальную составляющую скорости из (24) с учетом теоремы Эйлера об однородных полиномах можно записать в виде

$$V_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{nr}{2\mu(2n+3)}P_n + \frac{n}{r}F_n\right),$$

и соответственно

$$r\frac{\partial V_r}{\partial r} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{n(n+1)r}{2\mu(2n+3)}P_n + \frac{n(n-1)}{r}F_n\right).$$

Если через $\mathbf{H} = \mathbf{V}(R,\theta,\varphi)$ — обозначить величину скорости на поверхности частицы, то можно записать

$$V_r = \frac{1}{r}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{H}, \quad r\frac{\partial V_r}{\partial r} = -r\nabla\cdot\mathbf{H} \qquad \text{при } r=R.$$

Причем справедливость второго из этих уравнений зависит от выполнения уравнения непрерывности, в то время, как первое справедливо для произвольной векторной функции V.

Учитывая, что на поверхности частицы компоненты скорости нам известны, их можно разложить в ряды по поверхностным сферическим функциям [3].

$$\frac{1}{r}\,\mathbf{r}\cdot\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty}X_n(\theta,\varphi), \quad -r\nabla\cdot\mathbf{H} = \sum_{n=1}^{\infty}G_n(\theta,\varphi), \quad (26)$$

где функции $X_n(\theta,\varphi)$ и $G_n(\theta,\varphi)$ можно найти при помощи заданной скорости H на поверхности частицы.

Рассматривая совместно выражения (24)-(25) и (26) в случае, когда жидкость занимает внешнюю область от капли, имеем

$$P_{-(n+1)} = \mu\frac{2n-1}{R(n+1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}[(n+2)X_n + G_n],$$

$$F_{-(n+1)} = \frac{R}{2(n+1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}[nX_n + G_n], \quad P = \sum_{n=1}^{\infty}P_{-(n+1)},$$

$$\mathbf{V} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\nabla F_{-(n+1)} - \frac{(n-2)r^2}{2\mu n(2n-1)}\nabla P_{-(n+1)} + \frac{n+1}{n\mu(2n-1)}P_{-(n+1)}\,\mathbf{r}\right]. \quad (27)$$

Так как функции $X_n(\theta,\varphi)$ и $Y_n(\theta,\varphi)$ могут быть вычислены из заданного значения скорости на поверхности частицы, задачу можно считать в принципе решенной.

Как только краевая задача для внешнего обтекания решена, то сила, действующая на частицу, определяется по формуле [5]

$$\mathbf{F} = -4\pi\nabla(r^3P_{-2}). \quad (28)$$

Формула (28) справедлива для сферических и несферических частиц, т.е. она определяет силу, действующую на частицу произвольной формы.

Поскольку на поверхности слабо деформированной капли величина скорости $\mathbf{H}_e^{(1)}(\theta,\varphi)$ нам известна (см. (22)), то с учетом (26) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_k X_n^{(1)}(\theta,\varphi) = U_\infty xY_k(A_2+3A_1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_k G_n^{(1)}(\theta,\varphi) = -U_\infty\left[xY_k(A_2+9A_1) - (1-x^2)\frac{\partial Y_k}{\partial x}\left(\frac{3}{2}A_1-\frac{A_2}{2}\right)\right].$$

Здесь индекс « к » указывает на суммирование по этому индексу согласно формуле (3). Эти выражения можно записать в следующем виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_k X_n^{(1)} = \frac{A_2+3A_1}{2k+1}(L_{k-1}-M_{k+1}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_k G_n^{(1)} = \frac{1}{2k+1}\left[\left\{k\left(\frac{3}{2}A_1-\frac{A_2}{2}\right)-\frac{3}{2}A_2-\frac{15}{2}A_1\right\}L_{k-1} + \left\{k\left(\frac{3}{2}A_1-\frac{A_2}{2}\right)+A_2+9A_1\right\}M_{k+1}\right],$$

где $L_{k-1}(\theta,\varphi)=\frac{1}{r^{k-1}}(U_\infty\cdot\nabla)r^k Y_k$, $M_{k+1}(\theta,\varphi)=r^{k+2}(U_\infty\cdot\nabla)\frac{Y_k}{r^{k+1}}$ — поверхностные сферические функции соответственно $(k-1)$ и $(k+1)$ степеней [5]. Учитывая это, имеем

$$
{}_k P^{(1)}_{(n+1)}=\mu_e\begin{cases}\frac{(2k-3)(k-1)}{k(2k+1)}\frac{R^{k-1}}{r^{2k-1}}\left(\frac{9}{2}A_1+\frac{A_2}{2}\right)(U_\infty\cdot\nabla)r^k Y_k & \text{при } n=k-1,\\ -\frac{3}{2}\frac{R^{k+1}}{k+2}\left[k(A_1+A_2)+\frac{4}{3}A_2\right](U_\infty\cdot\nabla)\frac{Y_k}{r^{k+1}} & \text{при } n=k+1,\\ 0 & \text{при всех других } n.\end{cases} \quad (29)
$$

Поскольку при определении сил учитываем только члены с $n=1$, т.е. $k=0$ и $k=2$ из(29), получаем

$$
P^{(1)}_{2}=\sum_{k=0}^{2} {}_k P^{(1)}_{2}=\frac{R}{r^3}\mu_e\left[Y_0 A_2\, U_\infty\cdot r+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{2}A_1+\frac{A_2}{2}\right)(U_\infty\cdot\nabla)r^2 Y_2\right]. \quad (30)
$$

Сила, действующая на слабо деформированную каплю, равна

$$
\mathbf{F}=\mathbf{F}^{(0)}+\varepsilon\,\mathbf{F}^{(1)}, \quad (31)
$$

где $\mathbf{F}^{(0)}$ — сила, действующая на недеформированную каплю (формула Адамара-Рыбчинского [5]

$$
\mathbf{F}^{(0)}=6\pi R\mu_e U_\infty\frac{1+\frac{2}{3}\delta}{1+\delta}\mathbf{n}_z, \quad (32)
$$

$\mathbf{n}_z$ — единичный вектор в направлении оси z и $\mathbf{F}^{(1)}=-4\pi\nabla(r^3 P_e^{(1)})$. (34)

Подставляя в (33) выражение (30), имеем

$$
F^{(1)}=6\pi R\frac{\mu_e}{1+\delta}\left[\left(1+\frac{2}{3}\delta\right)Y_0 U_\infty-\frac{1}{10}\left(1-\frac{\delta}{3}\right)\nabla((U_\infty\cdot\nabla)r^2 Y_2)\right]. \quad (34)
$$

Таким образом, силу, действующая на слабо деформированную каплю, можно записать в виде

$$
F=6\pi R\mu_e\left[\frac{1+\frac{2}{3}\delta}{1+\delta}U_\infty+\varepsilon\frac{1}{1+\delta}\left[\left(1+\frac{2}{3}\delta\right)Y_0 U_\infty-\frac{1}{10}\left(1-\frac{\delta}{3}\right)\nabla((U_\infty\cdot\nabla)r^2 Y_2)\right]\right]. \quad (35)
$$

Здесь $\delta=\mu_e/\mu_i$.

При $\mu_i\to\infty$ формула (35) переходит в выражение для силы, действующей на слабо деформированную твердую частицу [2]

$$
F=6\pi R\mu_e\left[U_\infty+\varepsilon\left[Y_0 U_\infty-\frac{1}{10}\nabla((U_\infty\cdot\nabla)r^2 Y_2)\right]\right]. \quad (36)
$$

В качестве примера полученных выше результатов рассмотрим обтекание сфероидальной капли. Поверхность сфероида определяется следующей формулой [5]

$$
\frac{x^2+y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2(1-\varepsilon)^2}=1. \quad (37)
$$

При $\varepsilon>0$ сфероид является сплюснутым, при $\varepsilon<0$ — вытянутым. До членов порядка $O(\varepsilon)$ уравнение (37) можно записать в виде [5]

$$
r=R\left\{1-\varepsilon\left[\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)\right]\right\}+O(\varepsilon^2),
$$

где $x=\cos\theta$, $\cos\theta=z/r$, $P_0(x)=1$ и $P_2(x)=(1/2)(3x^2-1)$. (38)

Сравнивая (38)и (6), получаем

$$
Y_0=-\frac{1}{3},\quad Y_2=-\frac{2}{3}P_2(x).
$$

Следовательно, с точностью до первого порядка малости, при обтекании параллельно оси симметрии сфероидальной капли сила равна

$$
F=6\pi R\mu_e\frac{U_\infty}{1+\delta}\left\{\left(1+\frac{2}{3}\delta\right)-\frac{\varepsilon}{5}\left(1+\frac{4}{3}\delta\right)+O(\varepsilon^2)\right\}\mathbf{n}_z \quad (39)
$$

Выражение (38) позволяет приближенно оценить гидродинамическую силу сфероидальной капли. Эта сила существенно зависит от отношения вязкостей (δ), что подтверждается численными расчетами [4].

Таким образом, формула (35) позволяет оценить гидродинамическую силу, действующую на слабо деформированную каплю. Эта сила зависит от формы поверхности, причем вклад дают только гармоники нулевого и второго порядка и от отношения вязкостей.

ЛИТЕРАТУРА:

1. T. D. Taylor, A. Acrivos On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number II]. Fluid Mech., 1964. Vol. 18. № 3. P. 466-476.
2. 1-1. Brenner The Stokes resistance of slightly deformed sphere // Chem. Eng. Sci., 1964. Vol. 19. P. 519-539.
3. Brignell B. The deformation of a liquid drop at small Reynolds number //Quart. J. Mech. And Appl. Match., 1973. Vol. 26. № 1. P. 99-107.
4. Берковский Б.М., Краков М.С., Никифоров И.В, Полевиков В.К. Гидродинамическое сопротивление эллипсоидальной капли при малых числах Рейнольдса/УМЖГ, 1987. № 3. С. 4-8.
5. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
6. Тихонов А.М., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физ-мат. лит., 1962. 1100 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.