О. Н. Голубева, А. Д. Суханов

Роль физического моделирования в развитии математического мышления

Исходная позиция авторов состоит в том, *что* эффективность преподавания математики нельзя оценивать только в рамках задач собственно математического образования, то есть по тем конкретным знаниям, умениям и навыкам, которые в итоге приобретает студент. К ним относится владение в определенных рамках аппаратом дифференциального и интегрального исчисления, векторной алгеброй, теорией вероятности, методами теории игр, теорией алгоритмов, математической логикой и многими другими разделами современной математики.

Учитывая возросшую роль математики в обществе, а также цели и задачи педагогического университета, эффективность математического образования следует рассматривать в более широком контексте. В него входят факторы общего интеллектуального и профессионального развития, которые определят дальнейшую судьбу выпускника учебного заведения на поприще как учителя, так и исследователя. В этом ракурсе эффективность математического образования может быть охарактеризована еще одним фактором, не менее значимым, чем названные выше. Этот фактор в обобщенной форме может быть обозначен как степень освоения математического мышления. Пути достижения этой цели сосредоточены, главным образом, в цикле математических дисциплин. Однако они не замкнуты исключительно в них. Анализ мнений и опыта наиболее известных математиков современности показывает неоценимый вклад естественных наук (и прежде всего физики) в процесс становления математического мышления.

Один из самых выдающихся математиков XX века Герман Вейль не только внес бесценный вклад в фундаментальную теоретическую физику, но и оставил очень значительный след в эпистемологии, обращаясь к исследованию особенностей и общих принципов мышления математика. Именно поэтому в контексте рассматриваемой педагогической темы представляет большой интерес его выступление на конференции по поводу двухсотлетия Пенсильванского университета, озаглавленное «The Mathematical Way of Thinking» [1]. Касаясь глубоких методологических вопросов логики и математики, он тем не менее апеллирует к проблемам преподавания, ибо, объясняя суть математического мышления, Г. Вейль ссылается на то, «чему должен научиться средний образованный человек, пройдя курс обучения математике».

При этом он озабочен исследованием не только той формы мышления, «к которой прибегает математик в своей собственной области, будучи предоставленным самому себе», но и той «особой формой рассуждений, посредством которых математика проникает в науки о внешнем мире — в физику, химию, биологию, экономику и т. д». Будучи автором «Philosophy of Mathematics and Natural Science», Г. Вейль излагает собственный взгляд профессионального *математика* на познание *физического* мира.

Комментируя позицию Вейля, Г. Е. Минц высказывает образное суждение, которое можно признать очень значимым для образования [2]. Он считает, что историческая формула Архимеда «Дайте мне точку опоры...» предоставляет повод уподобить математику всесильному рычагу и возложить поиск точек опоры на теоретическую физику. Своеобразным компасом в этих исканиях должна, по его мнению, выступать физическая интуиция, «возникающая только у того, кто физическую реальность облазил вдоль и поперек, ощупал ее собственными руками...».

В этих словах содержится оценка той роли, которая отводится физике в процессе формирования математического мышления (если физическую интуицию понимать достаточно широко, не как наитие, а как устойчивый стиль мышления, основанный на опыте теоретического осмысления природы). Принимая во внимание, что подобный опыт нарабатывается не стихийно, а в образовательном процессе, можно сформулировать *императив о сущностной взаимосвязи* между преподаванием математики и физики.

Речь идет не только о такой достаточно банальной задаче, как сопряжение понятийного аппарата математики (вектора, вероятности, функции, производной, интеграла, дифференциального уравнения и т. п.) с понятийным аппаратом физики, в котором содержатся прообразы практически всех фундаментальных математических представлений. Сама но себе эта задача осознана уже многими преподавателями математики, но она относится скорее к числу чисто *методических.* Для ее решения требуется оснастить курс математики значительным количеством физических приложений, скорректировать терминологию и стандартные обозначения, согласовать хронологию изучения соответствующих разделов физики и математики и т. д. Подобная деятельность требует соучастия физиков, однако в целом она находится в компетенции кафедр математики.

Другая, может быть, более трудная сторона реализации взаимосвязи преподавания математики и физики носит *методологическую* окраску. Она касается согласованного воздействия на формирование мышления. При этом необходимо добиваться своеобразного «эффекта перекрестной симметрии»: с одной стороны, без математики и ее аппарата не может быть конструктивного физического познания; с другой стороны, физика как наука о природе способна оплодотворить становление математического мышления. В этом плане не менее важно, чтобы сам метод физического познания природы, суть которого состоит в построении физических моделей разного уровня обобщенности, то есть фактически — физической реальности, был источником и стимулом для формирования математической реальности.

Для этого физическое моделирование в образовании должно сопровождаться выявлением «точек опоры» для конструирования «математических рычагов», способствующих если не перевороту в понимании мира, то хотя бы прорыву в неизведанные области (как, скажем, отмеченное Г. Вейлем влияние теории относительности на развитие нескольких разделов математики, в том числе на теорию инвариантов, а также в более общем плане воздействие физики на геометрию и т. д.). Опираясь на мнение корифея математики, следует высказать категорические возражения против тенденции к сокращению у математиков объемов собственно физических курсов и замещению их курсами математической физики, что с позиций освоения физического стиля мышления явно не одно и то же. В противоположность этому следует стремиться к более глубокому использованию физики в процессе образования математиков, формируя условия для того, чтобы они действительно могли осознать физическую реальность и использовать ее как подспорье в профессиональной деятельности. Значительный вклад в достижение этих целей может дать не традиционное описательное изложение законов физики, а специально поставленный курс, направленный на изучение физических моделей.

В подобном курсе должно быть освещено принципиальное различие между физическим и математическим моделированием. Имея между собой определенное сходство, они тем не менее основаны на разных подходах, воплощая в себе как бы разные языки познания. Известный математик и блестящий педагог Л. Д. Кудрявцев отмечает, что математическую модель можно считать построенной, если соблюден целый ряд особых требований: например, указаны сделанные приближения, строгими рассуждениями доказано существование решения уравнения (или найдено его численное решение) и определена область его существования, установлена сходимость вычислительного процесса и оценена его скорость и т. д. [3].

Наиболее распространенной математической моделью является дифференциальное уравнение. Для его составления, как известно, требуется задание только локальных связей и притом в самой общей форме (типа линейной, квадратичной и т. д.), а также некоторых параметров системы. Сам факт существования решений не предустановлен *a priori* и требует отдельного доказательства. В процессе поиска соответствующих решений и их анализа формируется информация о возможном поведении объекта в целом и предсказывается дальнейший ход явления. В некотором смысле математикам даже все равно, что стоит за обозначениями тех переменных, которые входят в уравнение (например, смещение элемента струны или электрическое поле). В этом и заключается мощь математических моделей — они универсальны и как бы безразличны к физическому содержанию входящих в них символов.

Физическая модель, конечно, включает в себя и соответствующее математическое уравнение. Но, как правило, в физике рассматриваются уже готовые решения. Отчасти это обусловлено тем, что часто они заранее подсказаны экспериментом. Если же экспериментальное подтверждение еще не найдено, то прилагаются усилия для их прецизионного поиска. Физическому подходу недостаточно теоретического доказательства. Любая гипотеза остается таковой до тех пор, пока Его Величество Эксперимент не скажет своего веского слова.

Однако построение физических моделей необходимо сопровождается и иными познавательными операциями, ибо объекты физического исследования — это реальные объекты природы, а не абстрактные символы. Мало того, что здесь недостаточно ограничиться умозрительным указанием на малость некоторого параметра и требуется четкое представление, чему в действительности оно соответствует.

При построении физических моделей прежде всего необходимо понимание особенностей физической задачи, приводящей к тому или иному дифференциальному уравнению. Например, одно и то же уравнение типа диффузии может быть записано и для концентрации частиц и для волновой функции. Однако в первом случае оно интерпретирует динамику рассасывания капли, а во втором случае «поведение» амплитуды вероятности. С физической точки зрения, это не просто разные явления, это принципиально разные модели, относящиеся к двум различным сторонам физической реальности: рассасывание капли описывается динамикой наблюдаемой (физической) величины, а амплитуда вероятности относится к состоянию объекта.

Не вдаваясь в описание других различий между математическими и физическими моделями, укажем лишь еще на один существенный момент. Физическая модель содержит в свернутом виде определенную стратегию познавательной деятельности человека-исследователя [4-7]. В приведенном выше примере каждая из версий уравнения диффузии воплощает разные стратегии познания. Диффузия капли соответствует классической стратегии, которая рассматривает воздействие окружения как контролируемый фактор. Изучение поведения амплитуды вероятности состояния возможно лишь в рамках неклассической стратегии, когда принимается во внимание неконтролируемое воздействие окружения. Своеобразные проекции классической и неклассической стратегий познания присутствуют и в математике в виде детерминированных и вероятностно-игровых моделей, однако в них не анализируется стратегия познания.

Более того, современная математика, как известно, оперирует с различными типами логики. Для того, чтобы выйти за пределы формальных логических представлений, физика как раз способна предъявить массу возможностей. Методология поиска физического обоснования и построения модели явления не ограничена жесткими рамками однозначной интерпретации причинно-следственных отношений. Об этом свидетельствует возможность использования нескольких моделей применительно к одному и тому же явлению (как, например, корпускулярной и континуальной в рамках классического подхода к описанию преломления и отражения света). Одновременно с этим в физике решается также задача оптимизации выбора модели, которая рассматривается с позиций рационализации используемого математического аппарата.

Еще один аспект рассмотрения проблемы использования физических представлений для повышения эффективности преподавания математики связан с задачами формирования функционального мышления. Опять-таки изучаемый в физике мир природы, в котором царит идея всеобщей взаимосвязи явлений, дает богатый материал для обсуждения функциональных связей и самого понятия функции.

Не менее важна для преподавания математики, как известно, и проблема строгости математических доказательств. Используемый в математическом анализе язык «дельта — эпсилон» часто подвергается критике из-за кажущейся абстрактности. Вместе с тем, именно для физики он является естественным. В природе не существует истинно мгновенных процессов и бесконечно больших величин, резких скачкообразных изменений и т. п, поэтому, скажем, строгое введение S — функции Дирака может стать значительно более доступным, если, как на это указывает Л. Кудрявцев, сопровождить его физическим примером, в частности о том, что мгновенная функция, например сила — это идеализация реального явления, когда в действительности действует дельта — эпсилон сила в течение промежутка времени длительности эпсилон. Если потребовать равенства импульсов этой реальной силы и модельной, описываемой 6 — функцией, то становится естественным определение, согласно которому интеграл от 8 — функции равен пределу обычных интегралов от «размазанных» дельта-эпсилон сил, когда эпсилон стремится к нулю.

Каталог подобных примеров можно продолжить, однако они могут сыграть и другую полезную роль. Речь идет о точности косвенных физических измерений, в которых эпсилон можно трактовать как погрешность определения некоторой величины. Тогда А (е), определяющая погрешность другой, функционально связанной с первой, физической величины приобретает весьма простой смысл и делает достаточно понятным требование перехода к пределу при £-~>0.

Итак, сказанное выше не исчерпывает всех аргументов о методической целесообразности обращения к физическим примерам, однако позволяет сделать уверенное заключение о том, что раздельное изучение математики и физики создает целый ряд дополнительных трудностей и обедняет почву для созревания полноценного математического мышления. Мы убеждены в том, что, оценивая эффективность математического образования с точки зрения сформированности математического мышления, нельзя пренебрегать теми специальными возможностями, которые открывает для этого изучение физики.

Следует подчеркнуть, что даже в том случае, когда процесс непосредственного изложения студентам необходимого курса физического моделирования затруднен техническими или иными причинами, целесообразно ознакомить преподавателей с соответствующим материалом, чтобы они имели возможность использовать его в своих методических разработках. В этом случае есть основания для уверенности в том, что выдвинутая выше гипотеза о повышении эффективности преподавания математики за счет включения физического моделирования в содержание образования математиков вскоре будет экспериментально подтверждена.

Дальнейшее движение в этом направлении потребует углубления трактовки моделей неклассической физики и выявления их математического содержания. Проникновение элементов неклассического мышления в преподавание математики может быть поддержано в ходе изучения физики.

Не менее важный вопрос — освоение постнеклассической стратегии познания. На пути к этой цели важнейшую роль могут сыграть исследования и классификация нелинейных, хаотических, синергетических и эволюционных моделей физики и естествознания в целом с максимальным использованием достижений математики конца 20 века.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
2. Минц Г. Е. Комментарий к части II // Г. Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989.
3. Кудрявцев Л. Д. Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980.
4. Стенин В. С. Философская антропология и философия науки. М., 1992.
5. Мамардашвили М. Классический и неклассический идеалы рациональности. М., 1994.
6. Суханов А. Д., Голубева О. Н. К вопросу о принципах структурирования физического знания. XI Международная конференция по логике, методологии и философии науки. Обнинск, 1995.
7. Голубева О. Современная парадигма образования и новый подход к преподаванию физики. Вестник РУДН. Серия ФЕНО. 1 (1). 1995. С. 25-57.