аспектам истории отечественного школьного математического образования, нашедшим дальнейшее развитие и выход в современность. При этом важен сравнительный анализ некоторых педагогических и методических идей современной школы и школы прошлого. Это относится, в частности, к проблемам фуркации образования, в том числе математического, введения альтернативных учебников и программ, предоставления в этом вопросе известной свободы учителю и педагогическому совету.

Итак, кроме решения целого комплекса общекультурных и образовательных задач курс истории математического образования в России раскрывает перед учителем математики уникальный характер отечественного опыта школьного математического образования, учитывающего национальный менталитет, адаптированный к вполне определенным отечественным условиям. Он дает повод не только для национальной рефлексии, которой наш народ чрезмерно увлекся, но и для национальной гордости, без возрождения которой невозможен прогресс общества.

Литература

1. Бордовский Г.А. Современные требования к структуре и содержанию непрерывного педагогического образования // Подготовка специалиста в области образования (структура и содержание). СПб.: Образование, 1994.
2. Давыдов Ю.С. Высшее образование: состояние, проблемы, решения // Педагогика. 1997. № 2.
3. Курс "История отечественной педагогики" // Базовое педагогическое образование (Педагогический аспект): Материалы к учебным программам. СПб.: Образование, 1993.
4. Ницше Ф. О пользе и вреде истории для жизни // Философия истории. Антология. М.: Мысль, 1994.
5. Полякова Т.С. Историко-методическая подготовка учителя математики: Методический аппарат. Ростов н/Д.: Изд-во РГПУ, 1997. 64 с.
6. Полякова Т.С. История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. 1: век восемнадцатый. Ростов н/Д.: РГПУ, 1997.
7. Полякова Т.С. Программа курса по истории отечественного школьного математического образования // Мат. в шк. 1993. № 3.
8. Покровский В.В. Прогнозы и угрозы // Сегодня. 1 сент. 1994 г.
9. Реформирование образования в России: Материалы "круглого стола" // Педагогика. 1997. № 5.
10. Розанов В.В. Беспочвенность русской школы // Народное образование. 1990. № 8.
11. Розов Н. Ценности гуманитарного образования // Высшее образование в России. 1996. № 1.
12. Ушинский К.Д. Избранные педагогические сочинения. В 2-х т. Т. 2. М.: Учпедгиз. 1954.
13. Франк С.Л. Русское мировоззрение // Духовные основы общества. М.: Республика, 1992.
14. Ходячий Ф.З. Социологические проблемы науки, образования и воспитания // Непрерывное педагогическое образование. Вып. XII. СПб.: Образование, 1996.
15. Шаповалов В. Россиеведение как учебная дисциплина // Высшее образование в России. 1997. № 3.

В.А. Кузнецова

Формирование логической культуры студента при изучении основных понятий и теорем в математике

Традиционные методы изучения понятий и теорем, как правило, не предполагают активного использования логического языка математики. Однако же осознанное применение логической символики оказывает сильное влияние на развитие логики мышления.

Умение рассуждать носит субъективный характер, люди им обладают в разной степени. Поэтому для некоторых студентов детальная проработка понятий, формулировок не является обязательной. Однако если учесть массовость профессии учителя и необходимость подготовки к педагогической деятельности **каждого** выпускника педвуза, то становится понятной целесообразность обучения использованию формализованного языка для лучшего усвоения математических знаний, в частности, понятий и теорем.

Весьма полезно словесную формулировку понятия сопровождать записью через символы математической логики с употреблением кванторов. (Подобную запись, следуя [1], назовём кодированием). По возможности, это надо осуществить в двух видах: через использование двойственных наборов кванторов. Указанный подход приучает студентов не только к точному выражению мыслей, но и способствует формированию самой культуры мышления.

Например, если принять, что логические связки являются более слабыми по сравнению со всеми другими отношениями, то определение выпуклого множества может быть записано в следующем виде:

$$(\forall x_1)\,(\forall x_2)\,(\forall \lambda)\ (x_1 \in M \& x_2 \in M \& 0 < \lambda < 1 \Rightarrow (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \in M).$$

Иногда кванторы общности, по договорённости, в записи опускают [2], также опускают скобки, внутри которых стоит обозначение квантора со связываемой им переменной [2,3], однако в методическом плане считаем эти шаги неоправданными.

Вторая формулировка через двойственные наборы кванторов следует из закона двойного отрицания $a \equiv a$ и известных связей между кванторами:

$$\rceil((\forall x)\,P(x)) \equiv (\exists x)\rceil P(x) \qquad (1)$$
$$\rceil((\exists x)\,P(x)) \equiv (\forall x)\rceil P(x) \qquad (2)$$

Обозначение операции отрицания иногда осуществляется с помощью проставления черты высказыванием или соответствующим предикатом.

Например, равносильности (1)-(2) могут быть записаны в виде:

$$\overline{((\forall x)\,P(x)} \equiv (\exists x)\ \overline{P(x)}$$
$$\overline{((\exists x)\,P(x)} \equiv (\forall x)\,\overline{P(x)} \qquad (3)$$

В дальнейшем будем пользоваться обоими обозначениями.

Кроме указанных равносильностей потребуется воспользоваться ещё следующими:

$$a \Rightarrow b \equiv \overline{a} \vee b$$

$$\overline{\overline{a} \vee b} \equiv a \& \overline{b} \qquad (4)$$

Тогда, чтобы получить вторую формулировку понятия выпуклого множества, поставим двойное отрицание над первой, а затем воспользуемся формулами (2)-(4). В результате будем иметь:

$$\rceil((\exists x_1)\,(\exists x_2)\,(\exists \lambda)\ (x_1 \in M \& x_2 \in M \& 0 < \lambda < 1 \ \& \ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \notin M)).$$

Множество M – выпуклое, это значит: не существует таких точек x_1, x_2, которые принадлежат множеству M, а какая-нибудь внутренняя точка отрезка $[x_1, x_2]$ ему не принадлежит.

Однако формулировки, начинающиеся с отрицания, бывают достаточно сложны для восприятия. Поэтому даже для построения формулировки отрицания (шаг – весьма полезный для глубокого его осмысления) часто пользуются позитивной формой.

Например, позитивное определение невыпуклого множества выглядит следующим образом:

$$(\exists x_1)\,(\exists x_2)\,(\exists \lambda)\ (x_1 \in M) \ \& \ (x_2 \in M) \ \& \ (0 < \lambda < 1) \ \& \ ((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 \notin M)).$$

Множество M невыпукло – это значит: существуют такие точки x_1, x_2, которые принадлежат множеству M, а какая-то внутренняя точка отрезка $[x_1, x_2]$ не принадлежит ему.

Определение сходящейся последовательности с употреблением кванторов ограниченного действия имеет следующий вид:

$$(\exists a)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall n)\,(n \geq N \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon).$$

Определение расходящейся последовательности, то есть последовательности, не имеющей конечного предела, может быть записано следующим образом:

$$(\forall a)\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall N)\,(\exists n)\,(n \geq N \ \& \ |x_n - a| \ \geq \varepsilon).$$

Для любого вещественного числа a всегда существует такое $\varepsilon > 0$, что какое бы N ни взять, найдётся такой номер n, не меньший N, для которого $|x_n - a| \geq \varepsilon$. В учебнике [4.С.88] имеется следующее определение расходящихся последовательностей: "Последовательности, не являющиеся сходящимися, принято называть расходящимися". Разумеется, параллельно с таким определением полезно дать выше приведённое, записанное с употреблением кванторов.

Заметим, что некоторые простые определения студенты кодируют сами, например, определение ограниченной, неограниченной, ограниченной сверху, неограниченной сверху последовательностей и т.д. Здесь студент легко увидит, что если последовательность не ограничена сверху, то это не значит, что она ограничена снизу, поскольку их определения задаются двумя различными следующими логическими конструкциями:

$$(\forall M)\,(\exists n)\,(x_n > M).$$
$$(\exists m)\,(\forall n)\,(x_n \geq m).$$

Следует заметить, что в приведённых примерах буква x не играет роли переменной, а служит лишь в качестве символа для обозначения члена последовательности. В качестве переменных выступают номера этих членов последовательности.

После выполнения нескольких примеров построения отрицаний студенты достаточно быстро осуществляют кодирование и уже затем приводят словесную формулировку.

Ещё пример: определение функции, непрерывной в точке x_0, означает:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in M_f)\,(|\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon),$$

где M_f – область определения функции $f(\,x)$.

Отрицание непрерывности в точке x_0 имеет вид:

$$\rceil((\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in M_f)\,(|\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon)).$$

Однако обычно на этой формулировке отрицания не останавливаются, а преобразуют в равносильное позитивное утверждение:

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in M_f)\,(|\,x - x_0\,| < \delta\ \&\ |\,f(x) - f(x_0)\,| \geq \varepsilon).$$

Функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 – это значит: существует такое положительное число ε, что какое бы положительное число δ ни взять, найдётся такое x, для которого одновременно с неравенством $|x - x_0| < < \delta$ будет выполняться неравенство $|\,f(x) - f(x_0)\,| \geq \varepsilon$.

Построение всевозможных отрицаний понятий способствует более глубокому осмыслению их.

Например, можно построить отрицание понятия предела функции, т.е. отрицание фразы:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Имеем:

$$\rceil((\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,(0 < |x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - a| < \varepsilon)),$$

или

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x)\,(0 < |\,x - x_0\,| < \delta\&\,|\,f(x) - a\,| \geq \varepsilon).$$

Число a не является пределом функции $f(x)$ в точке x_0 – это значит: существует такое ε (ε > 0), что для любого δ(δ > 0) найдётся такая точка $x \neq x_0$ из δ – окрестности точки x_0, для которой будет выполняться неравенство $|\,f(x) - a\,| \geq \varepsilon$).

В построенном отрицании указано, что a не является пределом функции $f(x)$. Это может быть вызвано двумя причинами: функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет предела или предел существует, но он не равен a. И тогда естественно каждый из этих случаев также записать через логическую символику. При этом обучающийся ещё раз осознаёт роль переменных, поскольку для записи первого случая достаточно a перевести из разряда фиксированного числа в разряд переменных, связать квантором существования и перед всем определением предела поставить отрицание:

$$\rceil((\exists a)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,(0 < |\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - a| < \varepsilon))$$

или

$$(\forall a)\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x)\,(0 < |\,x - x_0\,| < \delta\ \&\ |\,f(x) - a\,| \geq \varepsilon),$$

а второй случай равносилен конъюнкции:

$$(\exists m)\,(\lim_{x \to x_0} f(x) = m\ \&\ m \neq a),$$

т.е. имеем:

$$(\exists m)\,(\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\,((0 < |\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow |\,f(x) - m\,| < \varepsilon)\ \&\ (m \neq a)).$$

Следующим шагом, который полезно выполнить при изучении хотя бы некоторых отдельных понятий, является обсуждение того, что будет происходить с понятием при перестановке разноимённых кванторов. Например, перестановка кванторов общности и существования, связывающих переменные ε и δ в определении предела функции, приводит к ошибке.

Другой пример: определение непрерывности функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид:

$$(\forall c \in (a, b))\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in (a, b))\ (0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Переставив первый квантор с двумя следующими, получаем:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall c \in (a, b))\ (\forall x \in (a, b))\ (0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon).$$

Последняя запись есть определение равномерной непрерывности $f(x)$ на интервале (a, b). Таким образом, в данном случае с перестановкой кванторов связано различие свойств непрерывности и равномерной непрерывности функции на интервале.

Применение логического подхода к изучению понятий предполагает, что с самого начала понятие формируется в современной трактовке и развивается постепенно, с одной стороны, при переходе к своим частным случаям, а с другой – к своему обобщению. При этом такой подход не обязательно должен быть связан с историческими этапами развития понятия. Например, может быть сначала введено понятие бинарного отношения, как подмножества прямого произведения двух множеств, а затем рассмотрено понятие функции от одной переменной как некоторого частного вида бинарного отношения. После этого от бинарного отношения можно перейти к n-арному и рассматривать функции от нескольких переменных, операции и т.д.

Рассмотрение частных случаев понятия и его обобщение часто происходят не сразу с его введением, а после длительного временного промежутка, но при этом необходимо подчёркивать имеющуюся логическую связь, т.к. её осознание важно для целостного восприятия математических фактов.

Разные подходы к одному и тому же понятию наглядно демонстрируются в книге В. А. Любецкого [5]. Например, вектор рассматривается как упорядоченная пара вещественных чисел, как класс эквивалентности на множестве $R^2 \times R^2$, как параллельный перенос, как класс касающихся и кривых и т. д. [5.С.66-77]. Давая разные интерпретации одного и того же понятия, необходимо установить их эквивалентность. Потребность в доказательстве эквивалентности различных определений является одним из многочисленных критериев развитой логической культуры.

Немаловажную роль в формировании логического мышления играет умение обнаруживать аналогии. Например, студент может легко устнановить аналогию между определениями преобразования, обратного к данному, матрицы, обратной к данной, элемента группы, обратного к данному, и т.д.

Таким образом, при изучении основных математических понятий полезно выполнять следующие процедуры:

– записать определение понятия с помощью символики математической логики (при этом обратить внимание на то, что все переменные в предикатах должны быть связаны кванторами);

– привести словесную формулировку (осуществить декодирование);

– сформулировать отрицание определения понятия, по возможности в позитивной форме, при этом вновь применить кодирование и декодирование;

– рассмотреть частные виды понятия;

– указать понятия, служащие обобщением данных;

– привести различные модели с доказательством эквивалентности;

– для данных понятий найти аналогии.

Разумеется, все указанные процедуры не должны выполняться при изучении каждого основного понятия. Более того, не обязательно все процедуры нужно применять для одного и того же понятия.

Обратимся теперь к вопросам логического подхода к изучению теорем. Как известно из математической логики, утверждение является теоремой, если оно является последним в последовательности утверждений, каждое из которых есть либо аксиома, либо следствие каких-то предыдущих утверждений, полученных по заранее оговорённым правилам вывода. Применительно к теоремам различных математических разделов это означает, что при доказательстве в действительности в качестве условия используется не только истинность посылки, но и ранее доказанные теоремы.

С каждым утверждением вида

$$A \Rightarrow B, \qquad (5)$$

которое условно назовём прямым, обычно связывают ещё три утверждения:

$$B \Rightarrow A \qquad (6)$$

– обратное по отношению к прямому;

$$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \qquad (7)$$

– противоположное к прямому;

$$\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \qquad (8)$$

– противоположное к обратному (или обратно-противоположное).

Значение истинности обратного утверждения никак не связано со значением истинности прямого. О коллизиях, возникающих в связи с этим фактом, можно вспомнить не только при изучении отдельных теорем. Особенно наглядно это прослеживается при изучении истории V постулата и его эквивалентов. Что касается противоположных утверждений, то имеют место следующие равносильности, называемые законом контрапозиции:

$$\begin{aligned} A \Rightarrow B &\equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \\ B \Rightarrow A &\equiv \overline{A} \Rightarrow \overline{B} \end{aligned} \qquad (9)$$

Действительно:

$$\overline{B} \Rightarrow \overline{A} \equiv \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} \equiv B \vee \overline{A} \equiv \overline{A} \vee B \equiv A \Rightarrow B,$$

$$\overline{A} \Rightarrow \overline{B} \equiv \overline{\overline{A}} \vee \overline{B} \equiv A \vee \overline{B} \equiv \overline{B} \vee A \equiv B \Rightarrow A.$$

Даже школьник старших классов, а тем более студент, должны знать: посылка A обычно называется достаточным условием, а B – необходимым. При истинности A обязательно должно быть истинно B, а если A –ложно, то может быть как истинно, так и ложно.

Примеры:

1.Если четырёхугольник – ромб, то его диагонали взаимно-перпендикулярны.

Но если взят четырёхугольник, не являющийся ромбом, то его диагонали могут оказаться как взаимно-перпендикулярными, так и образующими другие углы.

2. Монотонно возрастающая, ограниченная сверху последовательность имеет конечный предел. Если последовательность немонотонно возрастающая, то о её пределе ничего сказать нельзя.

Далеко не всегда изучаемая теорема имеет столь простой вид $A \Rightarrow B$. Зачастую и посылка и заключение представляют собой сложные конструкции, состоящие из нескольких условий, соединённых различными логическими связками. Тогда построение обратного утверждения не обязательно строится полной перестановкой посылки (со всеми содержащимися в ней условиями) со всем заключением. И. С. Градштейн в известной книге [6] пишет: «Комбинируя различным образом условия, накладываемые на рассматриваемый объект, и утверждения, содержащиеся в заключении, мы можем из данной теоремы получить целый ряд обратных». Хотя, возможно, результат такого комбинирования условий, входящих в посылку и заключение, не стоит называть обратным утверждением, проводить его, разумеется, целесообразно, ибо оно позволяет определить роль тех или иных условий.

Итак, уже на первом шаге изучения теоремы полезно сформулировать обратное утверждение (решение вопроса о его истинности первоначально может быть отложено на какое-то время), сформулировать также противоположное и обратно - противоположное утверждение.

Сложность построения обратных утверждений определяется иногда неоднозначным смыслом словесной посылки, где часть необходимой информации домысливается. Об этом, в принципе, писал и И. С. Градштейн, приводя в качестве примера построение обратного утверждения для теоремы «Диагонали ромба взаимно-перпендикулярны» [6.С.32]. «Если обратную сформулировать как «четырёхугольник, диагонали которого взаимно-перпендикулярны, есть ромб», то эта теорема окажется неверной. Если же сформулировать её так: «Параллелограмм, диагонали которого взаимно-перпендикулярны, есть ромб», то она окажется верной».

Логическому осмыслению формулировки теоремы способствует использование терминов «необходимо», «достаточно», причём не в привычном для студентов парном сочетании «необходимо и достаточно»; отдельное употребление слов «тогда» и «только тогда». Например, теорему Больцано – Вейерштрасса [4.С.110]; «Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность» студент должен уметь сформулировать по-разному:

– Ограниченность последовательности является достаточным условием для выделения из неё сходящейся подпоследовательности.

– Существование у последовательности сходящейся подпоследовательности есть необходимое условие ограниченности самой последовательности.

– Последовательность ограничена только тогда, когда из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

– Из последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность тогда, когда она ограничена.

Следует провести кодирование формулировок. О роли кодирования при подготовке будущего преподавателя говорится в [1.С.79-80]. К сказанному там можно добавить одно немаловажное достоинство кодирования – оно обеспечивает краткость и обозримость записи. Наличие только символов и отсутствие слов облегчают чтение, позволяют быстрее понять смысл. Например, определение неубывающей последовательности имеет вид:

$$(\forall n \in N)\ (x_n \le x_{n+1}).$$

Словесная формулировка этого определения следующая [4.С.95]; «Последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей, если каждый элемент этой последовательности, начиная со второго, не меньше предыдущего её элемента».

Упомянутая теорема о диагоналях ромба будет иметь вид:

$$(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow Q(x)),$$

где $\{x\}$ – множество параллелограммов (или четырёхугольников, по усмотрению преподавателя) – область определения предикатов $P(x)$ и $Q(x)$;

$P(x)$ – предикат, выражающий свойство параллелограмма (четырёхугольника) быть ромбом;

$Q(x)$ – свойство параллелограмма (четырёхугольника) иметь взаимноперпендикулярные диагонали.

Обратное утверждение

$$(\forall x)\ Q(x) \Rightarrow P(x)),$$

есть теорема для случая, когда область определения есть множество параллелограммов; является ложным высказыванием, если область определения предикатов есть множество четырёхугольников.

Сразу же следует обратить внимание на то, что если надо доказать, что

$$(\forall x)\ (Q(x) \Rightarrow P(x)) \equiv 0,$$

то значит, надо убедиться, что

$$(\exists x)\ (Q(x)\ \&\ \overline{P(x)}) \equiv 1.$$

Это означает, что существует объект x (в данном случае – четырёхугольник), для которого $Q(x)$ выполняется, а $P(x)$ не выполняется (в данном случае надо построить четырёхугольник со взаимно-перпендикулярными диагоналями, не являющийся ромбом). Из сказанного следует, что для доказательства неверности утверждения достаточно привести пример (обычно говорят – контрпример, имея в виду, что посылка в нём истинна, а в то же время заключение ложно).

Утверждение, противоположное к прямому, равносильное обратному, имеет вид:

$$(\forall x)\ (\overline{P(x)} \Rightarrow \overline{Q(x)}).$$

Во всяком параллелограмме (четырёхугольнике), не являющимся ромбом, диагонали не взаимно-перпендикулярны.

Утверждение, обратно-противоположное прямому, имеет вид:

$$(\forall x)\ \overline{Q(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}).$$

Всякий параллелограмм (четырёхугольник), в котором диагонали не взаимно-перпендикулярны, не является ромбом (теорема).

Далеко не всегда кодированная запись столь проста, как в последнем рассмотренном примере. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести, например, формулировку уже упомянутой теоремы Больцано-Вейерштрасса:

$$(\forall\ \{x_n\})\ ((\exists A)\ (\forall n)\ (\,|\,x_n\,| \le A) \Rightarrow (\exists\ \{x_{nk}\})\ (\{x_{nk}\} \subset \{x_n\}\ \&$$
$$\&\ (\exists a)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N(\varepsilon))\ (\forall n_k)\ (n_k \ge N \Rightarrow |\,x_{nk} - a\,| < \varepsilon\,))\,.$$

Запишем предложение, обратно-противоположное данной теореме (т.е. ей эквивалентную теорему):

$$(\forall \{x_n\})\ (\urcorner(\exists \{x_{nk}\})\ ((\{x_{nk}\} \subset \{x_n\}\ \&$$

$$\& \, (\exists a)\, (\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N(\varepsilon))\, (\forall n_k)\, (n_k \geq N \Rightarrow$$
$$|\, n_{nk} - a \,| < \varepsilon\,)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \rceil (\exists A)\, (\forall n)\, (|x_n| \leq A)) \equiv$$
$$\equiv (\forall \{x_n\})\, ((\forall \{x_{nk}\})\, ((\{x_{nk}\} \not\subset \{x_n\}) \vee (\forall a)$$
$$(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall N)\, (\exists_{nk})$$
$$(n_k \geq N \,\&\, |\, x_{nk} - a \,| \geq \varepsilon\,)) \Rightarrow (\forall A)\, (\exists n)\, (|x_n|$$
$$> A)).$$

Данная запись означает: какую бы последовательность $\{x_{nk}\}$ни взять, или она не является подпоследовательностью данной последовательности, или не сходится, что и означает неограниченность данной последовательности. Иными словами: если у последовательности нет сходящейся подпоследовательности, то она не является ограниченной.

Следующим шагом после логической обработки формулировки теоремы (которая, порой, бывает более важной для развития логического мышления, чем даже само доказательство теоремы) является обсуждение логического метода доказательства. Кроме прямого доказательства теоремы вида $A \Rightarrow B$, когда из истинного A выводится истинное B, в методе «от противного» проводится доказательство одной из следующих трёх равносильных утверждению $A \Rightarrow B$ форм:

1. $A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow C \,\&\, \overline{C}$;
2. $A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;
3. $A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow B$.

Упомянутые равносильности можно получить с помощью простейших преобразований форм. Действительно:

$$1.\ A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow C \,\&\, \overline{C} \equiv \overline{A \,\&\, \overline{B}} \vee C \,\&\, \overline{C} \equiv$$
$$\equiv \overline{A} \vee \overline{\overline{B}} \vee 0 \equiv \overline{A} \vee B \equiv A \Rightarrow B;$$
$$2.\ A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \equiv \overline{A \,\&\, \overline{B}} \vee \overline{A} \equiv$$
$$\equiv \overline{A} \vee \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} \equiv \overline{A} \vee B \equiv A \Rightarrow B;$$
$$3.\ A \,\&\, \overline{B} \Rightarrow B \equiv \overline{A \,\&\, \overline{B}} \vee B \equiv$$
$$\equiv \overline{A} \vee \overline{\overline{B}} \vee B \equiv \overline{A} \vee B \equiv A \Rightarrow B.$$

При доказательстве методом «от противного» всегда предполагается, что A – истинно, а B – ложно. Затем в ходе рассуждений приходят к противоречию. В первом случае получают противоречие с каким-то ранее известным фактом C.

То есть в первом случае используется расширительное понимание посылки, когда вместе с A в посылку как бы входят все аксиомы и ранее полученные теоремы. Во втором случае получается противоречие с посылкой, а в третьем случае – противоречие с предположением ложности заключения.

По форме 1 доказывается, например, признак параллельности двух плоскостей. При доказательстве получаем противоречие с аксиомой параллельности (в формулировке Плейфера).

По форме 2 доказывается, например, признак параллельности прямой и плоскости. При доказательстве достаточности сформулированного условия предполагается, что данная прямая не параллельна данной плоскости, хотя она параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости. В ходе доказательства получаем противоречие с условием, то есть получаем, что данные две прямые не параллельны.

По форме 3 доказывается, например, теорема о несчётности множества точек отрезка [0,1]. Предполагаем счётность множества точек отрезка и получаем противоречие с предположением.

Иногда в учебной литературе, например, в [6], указывается, что доказательство методом "от противного" основано на использовании закона контрапозиции. В частности, в [6] на с.42 читаем: "...вместо того, чтобы говорить о замене доказательства данной теоремы доказательством теоремы, противоположной обратной, говорят о доказательстве "от противного". Однако это не совсем так. Отличие использования закона контрапозиции от метода доказательства "от противного" состоит в том, что здесь не приходят ни к какому противоречию. Действительно, вместо доказательства истинности утверждения вида:

$$A \Rightarrow B$$

по закону контрапозиции доказывается истинность равносильного ему обратно-противоположного утверждения:

$$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\ ,$$

т.е. предполагается, что $\overline{B}$ истинно и на основе этого выводится истинность $\overline{A}$.

На основе закона контрапозиции доказывается, например, следующая теорема: Если всякая плоскость, пересекающая одну из двух прямых a и b, пересекает и вторую, то эти прямые параллельны.

При доказательстве предполагается, что прямые a и b непараллельны, т.е. скрещиваются или пересекаются, и устанавливается, что тогда существует плоскость, пересекающая одну из этих прямых и не пересекающая другую [7. С.212-213].

Яркий пример использования закона контрапозиции приведён в [8] на с. 27.

Весьма продуктивно рассмотрение частных случаев изучаемой теоремы. Этот шаг не только увеличивает объём получаемой информации, но способствует формированию умения находить применение изучаемым математическим фактам. Например, сформулируем теорему Кантора: «Пусть даны два непустых множества X и Y, и пусть множество Y содержит, по крайней мере, два элемента. Тогда мощность множества отображений множества X во множество Y больше мощности множества X".

При её изучении совершенно необходимо рассмотреть случаи, когда Y имеет в точности два элемента, когда X есть множество натуральных чисел, когда X – множество вещественных чисел. В сущности, только после рассмотрения частных случаев студенты понимают всю важность данной теоремы и взаимосвязь между множествами разной мощности.

Если есть возможность, то полезно рассмотреть пути обобщения теоремы, например, при рассмотрении теоремы о существовании у бесконечного множества счётных подмножеств, естественно поставить вопрос: а сколько их? – конечное число или счётное множество?

На этапах отыскания частных случаев теорем, путей обобщения и аналогий студенты приобретают первый опыт исследовательской деятельности.

Упомянутые аспекты при изучении теоремы не исчерпывают всех возможных подходов. Следующими шагами могут быть: анализ теоремы на выделение составных частей (ключевых лемм), исследование роли теоремы, её места и связи с другими фактами.

Итак, при изучении теоремы иногда целесообразно выполнить следующие шаги:

– кроме словесной записать формулировку теоремы с помощью логической символики;

– определить логическую форму доказательства;

– записать обратное, противоположное и обратно-противоположное утверждения (словесно и в терминах математической логики);

– установить значение их истинности;

– рассмотреть частные случаи теоремы (если возможно);

– указать пути обобщения;

– определить место и роль теоремы в системе знаний соответствующего раздела и в приложениях.

Указанные шаги не должны обязательно выполняться в данной последовательности. Их реализация должна быть такой, чтобы «за деревьями был виден лес», то есть всегда должен выдерживаться определённый оптимум между указанной логической обработкой теоремы, процедурой доказательства и восприятием данного математического раздела и всей дисциплины в целом.

Литература

1. Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1998. 312 с.
2. Вольвачёв Т.В. Элементы математической логики и теории множеств. Минск: Изд-во «Университетское», 1986, 112 с.
3. Мендельсон Э. Введение в математическую логику: Пер. с английского. М.: Наука, 1984. 319 с.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. 719 с.
5. Любецкий В.А. Основные понятия школьной математики. М.: Просвещение, 1987. 400 с.
6. Градштейн И.С. Прямая и обратная теоремы. Изд. 4-е. М.: Наука, 1965. 128 с.
7. Столяр А.А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Высшая школа, 1965. 253 с.
8. Миракова Т.Н. Развивающие задачи на уроках математики в V-VIII классах: Пособие для учителей // Квантор. 1991. № 3. 96 с.

А.Г. Луканкин

Об эволюции взглядов на пространство и время в курсе теоретической физики

В настоящее время все большее внимание уделяется поиску путей совершенствования профессиональной подготовки будущих учите-