любом другом случае приведет к изменению собственной энергии диполя.

Литература

1. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.- Л.: Гостехиздат, 1948. 539 с.
2. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Электричество и магнетизм. М.: Мир, 1966. 296 с.
4. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.2. М.: Наука, 1970. 431 с.
5. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1970. 666 с.
6. Парселл Э. Электричество и магнетизм. Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1975. 439 с.
7. Тамм И.Е.Основы теории электричества. М.:Наука, 1976.616с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

А. В. Ястребов

Об укрупнении дидактических единиц в преподавании математического анализа: асимптоты

Посвящается М. И. БЕЛОСЛЮДЦЕВОЙ

1. Понятие укрупнённой дидактической единицы и цель работы

Теория укрупнения дидактических единиц (УДЕ) в обучении математике была создана П. М. Эрдниевым и его коллегами в 60-70-х годах. Помимо многочисленных статей, она была подробно изложена в ряде монографий, например, [9,10]. Результатом её внедрения стало появление учебников по математике с первого по пятый класс, основанных на положениях данной теории. Ориентируясь первоначально на математический материал младшего и среднего звена школы, она постепенно распространялась на разделы, которые с равным основанием могут быть отнесены к школе и вузу. Так, методика УДЕ была успешно испытана при совместном изучении понятий “производная” и “первообразная”, “дифференциал” и “интеграл” [10.С.77], двумерные и трёхмерные векторы [9. С.206-241]. Вместе с тем, анализ учебной литературы для классических и педагогических университетов показывает, что она не обеспечивает возможности применения методики УДЕ для изучения базовых математических курсов. Возникает естественный вопрос о причинах ограничения в сфере применения методики: принципиальная невозможность, практическая затруднённость, инерция традиций или что-либо ещё.

Настоящая статья имеет целью показать, что заданный материал по математическому анализу легко может быть преобразован в форму, удовлетворяющую требованиям теории и методики УДЕ. Для иллюстрации этого утверждения выбрано одно из понятий курса математического анализа – асимптота – и проведено сравнение тех умственных действий, которые выполняет студент при традиционном и авторском подборе упражнений. Разумеется, изучение асимптот представляет собой лишь небольшой фрагмент курса; располагая материалом также и по другим темам, мы остановились на одной из них в связи с ограниченностью объёма статьи.

Формулируя психолого-педагогическое определение УДЕ, П. М. Эрдниев пишет: «Укрупнённой дидактической единицей мы называем систему родственных единиц учебного материала, в которой симметрия, противопоставления, упорядоченные изменения компонентов учебной информации в совокупности благоприятствуют возникновению единой логико-пространственной структуры знания. Это определение в известной мере примыкает к определению понятия функциональной системы... По П. К. Анохину, система – совокупность не только *взаимодействующих, но и взаимоСО-действующих* компонентов, ориентированных на получение фокусированного полезного результата» [10. С.5].

Результаты исследований по методике применения УДЕ П. М. Эрдниев суммирует следующим образом: «Опыт обучения на основе укрупнения единиц усвоения показал, что основной формой упражнения должно стать *многокомпонентное задание*, образующееся из нескольких логически разнородных, но психологически состыкованных в некоторую целостность частей, например: а) решение «обычной готовой» задачи; б) составление обратной задачи и её решение; в) составление аналогичной задачи… и решение её; г) составление задачи по некоторым элементам, общим с исходной задачей; д) решение или составление задачи, обобщённой по тем или иным параметрам исходной задачи. Разумеется, вначале в укрупнённое упражнение могут войти лишь некоторые из указанных вариаций» [9.С.14].

Отметим, что структура многокомпонентного задания в значительной мере воспроизводит структуру деятельности профессионального математика. Действительно, математик самостоятельно формулирует задачи [см. пункты б), д)], ищет *методы* решения *классов* задач, т.е. работает с группами аналогичных задач [см. пункт в)], изучает соотношение между необходимыми и достаточными условиями того или иного факта, т.е. работает со взаимно обратными утверждениями [см. пункт б)], получает обобщения математических фактов [см. пункт д)]. Учебный характер укрупнённой единицы усвоения выразился преимущественно в том, что решение “обычной готовой” задачи поставлено на первое место. Следовательно, успешное применение методики УДЕ объективно означает, что в процессе преподавания воспроизводятся некоторые важные характеристики математических исследований. Таким образом, теория П.М. Эрдниева и более поздняя концепция автора о целенаправленном моделировании базовых свойств научных исследований в учебном процессе находятся в хорошем согласовании. (Развёрнутое изложение содержится в [11], краткое изложение можно найти в [12] или [13]).

Отметим также, что способность составлять задания, варьировать их компоненты в соответствии с конкретными методическими целями, получать обобщения изучаемых утверждений относится к важным профессиональным умениям учителя независимо от того, какой педагогической концепции он придерживается. Таким образом, использование теории и методики УДЕ в педагогическом вузе представляется не только естественным, но и желательным с различных точек зрения.

2. Изучение асимптот методом укрупнённых дидактических единиц

Всюду в дальнейшем “асимптота” означает невертикальную асимптоту при $x \to +\infty$; в ряде случаев асимптоты подразделяются на горизонтальные и наклонные.

Приведём пример укрупнённой дидактической единицы, состоящей из 7 заданий.

Задание 1. Найдите асимптоту функции

$$f(x) = \frac{6x^3 - 5x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x + 7}.$$

В задачниках [1, 3, 5, 6, 7] по математическому анализу содержится от 6 до 17 *упражнений* такого типа в каждом, а их общее число, за вычетом повторяющихся, равно 46. Задачник [4] не содержит специально выделенных упражнений на нахождение асимптот; по-видимому, предполагается, что студент научится отыскивать асимптоты при исследовании функций и построении их графиков. Важно отметить, что упомянутые задачники *не содержат заданий другого типа, связанных с изучением асимптот.* Учитывая, что упомянутые задачники были изданы массовыми тиражами, неоднократно переиздавались и использовались в течение нескольких десятков лет каждый, можно сказать, что для многих поколений студентов изучение асимптот было ориентировано на выполнение чисто технических навыков. (Такое же утверждение справедливо в отношении многих других тем, однако не это сейчас является предметом обсуждения).

По терминологии П. М. Эрдниева, задание 1 является “обычной готовой” задачей. По терминологии автора [13], задание 1 является упражнением (в отличие от задачи), поскольку для его выполнения достаточно применить стандартный алгоритм, базирующийся на нижеследующем утверждении.

Теорема. ([8.С.310]) Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Решение задания 1 может быть выполнено прямыми вычислениями по теореме или делением с остатком числителя на знаменатель с последующим исследованием асимптотического поведения функции. Асимптотой является прямая $y = 3x - 1$.

Примеры функций, имеющих асимптоты, естественно сопровождать контрпримерами. Нижеследующее задание приводит студента к серии контрпримеров, выявляя при этом возможные *причины* отсутствия асимптот.

Задание 2. Приведите пример функции $f(x)$, которая не имеет асимптоты, поскольку

а) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$;

б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ не существует;

в) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = \infty$;

г) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и

$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$ не существует.

Решение. а) Для того, чтобы дробь $\dfrac{f(x)}{x}$ стремилась к бесконечности, необходимо, чтобы числитель рос "быстрее" знаменателя при $x \to +\infty$. Таких функций много, например, $f(x) = x^2$, $f(x) = x \ln x$, $f(x) = 2^x$ и т. д.

б) Одна из причин, в силу которых предел дроби $\dfrac{f(x)}{x}$ не существует, может заключаться в том, что при $x \to +\infty$ она представляет собой "колеблющуюся без затухания" функцию. Для этого достаточно, чтобы числитель был произведением x на какую-либо функцию такого типа. Так мы получаем вторую серию контрпримеров:

$f(x) = x\mathrm{tg}\, x$, $f(x) = x^2 \cos x$, $f(x) = x \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$, $f(x) = x\{x\}$, $f(x) = xd(x)$ и.т.д.

Здесь $\{x\}$– дробная часть числа x, а $d(x)$ – функция Дирихле ([8. С.99]).

в) Дробь $\dfrac{f(x)}{x}$ стремится к конечному пределу, следовательно, числитель растёт "с той же скоростью", что и знаменатель. Это может быть, например, в том случае, когда он является суммой линейной функции и некоторой функции $\varphi(x)$, стремящейся к бесконечности, но "медленнее", чем x. Так мы получаем третью серию контрпримеров: $f(x) = x + \sqrt{x}$, $f(x) = 2x + \ln x$ и.т.д.

г) Четвёртая серия контрпримеров получается комбинацией функций из пунктов б) и в), а именно, в качестве функции $f(x)$ можно взять сумму линейной и ограниченной "колеблющейся" функции: $f(x) = x + \sin x$, $f(x) = 2x + \{x\}$ и т.д.

Задание 2 имеет несколько особенностей. Во-первых, оно решается на основе обращения к свойствам элементарных функций, что профессионально важно для будущего учителя. Во-вторых, контрпримеры строятся сериями, так что у преподавателя есть возможность организовать работу микрогрупп и получить в результате совместной деятельности достаточно детальный обзор элементарных функций. В-третьих, и главное, для решения приходится использовать понятие *о сравнительной скорости роста* функций: функция $g(x)$ растёт быстрее функции $f(x)$,

если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Для работы с последующими заданиями приведём шкалу скоростей роста, в которой каждая последующая функция растёт быстрее предыдущей:

ограниченная функция, $\log_a x$ $(a > 1)$, x^α $(\alpha > 0)$, a^x $(a > 1)$, x^x.

При изучении асимптот речь фактически идёт о взаимном расположении двух геометрических объектов – графика функции и её асимптоты, подобно тому, как в школьном курсе геометрии речь идёт о взаимном расположении двух прямых, прямой и окружности и т.д. В следующем задании мы поставим вопрос о функциях в духе курса геометрии.

Задание 3. Приведите пример функции, график которой а) не пересекает асимптоту; б) пересекает асимптоту в одной точке; в) пересекает асимптоту в двух точках; г) пересекает асимптоту в двух точках и касается её в одной точке, причём точка касания лежит между точками пересечения; д) пересекает асимптоту в конечном числе наперёд заданных точек; е) имеет с асимптотой бесконечное множество точек пересечения.

Решение. а) Таких функций достаточно много среди основных элементарных: x^{-1}, 2^{-x}, $\mathrm{arctg}\, x$, $\mathrm{arcctg}\, x$.

б) Инструментом построения могут служить многочлены, поскольку расположение их графиков относительно оси абсцисс известно: если многочлен имеет корень нечётной кратности, то его график пересекает ось абсцисс, а если он имеет корень чётной кратности, то его график касается её. Для решения задания б) достаточно умножить многочлен с однократным корнем, например x, или x^3, на быстро убывающую функцию, например, на 2^{-x} или 3^{-x}. Произведение $f(x) = x2^{-x}$ имеет ось абсцисс в качестве асимптоты. Для получения асимптоты общего вида достаточно прибавить к функции $f(x)$ линейную функцию.

в) Рассмотрим квадратный трёхчлен с двумя корнями, например, $(x-1)$ $(x-2)$, и умножим его на быстро убывающую функцию, например, на 2^{-x}. Получим функцию $f(x) = (x-1)(x-2)2^{-x}$, имеющую ось абсцисс в качестве асимптоты. Для получения функции с асимптотой общего вида достаточно прибавить к функции $f(x)$ линейную функцию.

г) Полином с двумя однократными корнями и одним двукратным корнем, например, $(x-1)(x-2)^2(x-3)$, расположен к оси абсцисс так же, как график искомой функции расположен по отношению к асимптоте. Искомую функцию получаем так же, как и в пунктах б) и в):

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)\,2^{-x}.$$

д) Аналогично находим

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)\,2^{-x}.$$

е) Стандартным примером является функция $f(x) = 2^{-x}\sin x$ с асимптотой $y = 0$, описывающая затухающие колебания. Для построения функции с асимптотой общего вида достаточно прибавить к данной функции линейную функцию.

Видоизменяя один из компонентов задания 1, а именно числитель дроби, мы трансформируем это чисто вычислительное упражнение в задачу о конструировании объекта.

Задание 4. Найдите многочлен $g(x)$, такой, чтобы функция

$$f(x) = \frac{g(x)}{2x^2-3x+5}$$

имела а) ось абсцисс в качестве асимптоты; б) горизонтальную асимптоту, не совпадающую с осью абсцисс; в) наклонную асимптоту, проходящую через начало координат; г) наклонную асимптоту, не проходящую через начало координат; д) асимптоту с уравнением $y = 5x + 7$.

Решение можно получить либо выполнив деление с остатком числителя на знаменатель с последующим исследованием асимптотического поведения функции, либо подставив данные задачи в оба условия теоремы и рассмотрев полученные равенства в виде системы ограничений, наложенных на степени и коэффициенты многочлена $g(x)$. (Эта система достаточно необычна, поскольку она включает предельные переходы!)

Ответы.

а) $g(x) = ax + b$;
б) $\deg g(x) = 3/2$;
в) $g(x) = ax^3 + (-3/2)\,ax^2 + cx + d$, $a \neq 0$;
г) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a \neq 0$ и $b \neq -3/2\,a$;
д) $g(x) = 10x^3 - x^2 + cx + d$.

Отметим, что мы не только построили требуемый многочлен, но и нашли *полное описание* множества многочленов, удовлетворяющих условию задачи.

Задание 5. Сформулируйте задание, аналогичное заданию 4.

Возможна тривиальная аналогия, когда единственным отличием нового задания от предыдущего является многочлен, стоящий в знаменателе. Мы предпочитаем не столь прямую аналогию и меняем местами неизвестный компонент задания, делая неизвестным знаменатель.

Формулировка. Выполните задание 4 применительно к функции

$$f(x) = \frac{6x^4+2x^3-5x^2+3x-7}{g(x)}.$$

Ответы.

а) $\deg g(x) > 4$;

б) $\deg g(x) = 4$;

в) $g(x) = ax^3 + \frac{1}{3}ax^2 + cx + d$, $a \neq 0$;

г) $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a \neq 0$ и $b \neq \frac{1}{3}a$;

д) $g(x) = \frac{6}{5}x^3 - \frac{32}{25}x^2 + cx + d$.

Задания 1, 4 и 5 дают некоторый материал для наблюдения. Например, студенту нетрудно увидеть, что при наличии асимптоты общего положения степень числителя на единицу больше степени знаменателя. В связи с этим нижеследующее задание становится вполне естественным.

Задание 6. Рассмотрев в совокупности задания 1, 4, 5 и их решения, сформулируйте обобщающую задачу.

Формулировка. При каких ограничениях на степени многочленов $g(x)$ и $h(x)$ рациональная рациональная функция

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \quad \text{имеет}$$

а) ось абсцисс в качестве асимптоты;

б) горизонтальную асимптоту, не совпадающую с осью абсцисс;

в) наклонную асимптоту, проходящую через начало координат;

г) наклонную асимптоту, не проходящую через начало координат;

д) наклонную асимптоту с уравнением $y = px + q$? Являются ли эти ограничения достаточными для наличия асимптоты соответствующего типа?

Задание 6 обобщает задания 1, 4, 5 по степени многочленов. Возможно обобщение другого сорта, например, по типу рассматриваемых функций, как это сделано ниже.

Задание 7. Найдите функцию $g(x)$ такую, что функция

$$f(x)=\frac{g(x)}{2e^{2x}-3e^{x}-\ln x}$$

имеет а) ось абсцисс в качестве асимптоты; б) горизонтальную асимптоту, не совпадающую с осью абсцисс; в) наклонную асимптоту, проходящую через начало координат; г) наклонную асимптоту, не проходящую через начало координат; д) наклонную асимптоту с уравнением $y = 3x + 4$.

Отметим, что здесь невозможно воспользоваться алгоритмом деления с остатком, поскольку $g(x)$ не является многочленом.

Ответ. д) $g(x) = (6x + 8)e^{2x} + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ растёт медленнее, чем e^{2x}.

3. Заключение

Нетрудно видеть, что работа с предлагаемой укрупнённой дидактической единицей предусматривает выполнение целого комплекса дополняющих друг друга умственных действий. Прежде всего, решается стандартная *вычислительная* задача (№ 1). Она дополняется рассмотрением задачи, *обратной* к данной в том или ином смысле; так, № № 4, 5 являются обратными по отношению к № 1. Предлагается *самостоятельно сформулировать* два утверждения (№ № 5, 6). При этом одно из них является задачей, *аналогичной* исходной; так, № 5 аналогичен № 4. Другое самостоятельно формулируемое утверждение – № 6 – *обобщает* три другие утверждения (№ № 1, 4, 5) по степеням числителя и знаменателя рациональной функции. Наряду с этим рассматривается обобщение *по другому* признаку; так, № 7 является обобщением № 4 по типу изучаемой функции. Весьма широко используется *конструирование* функций (№ № 2, 4, 5, 7), в частности, самостоятельное получение *контрпримеров* (№ 2). Наконец, одно из заданий – № 3 – идейно связывает изучение асимптот с курсом *геометрии.* Всё многообразие исследовательских действий базируется на важной математической идее – сравнении скоростей роста функций.

Итак, на примере изучения асимптот мы видим, что традиционный задачный материал по математическому анализу может быть преобразован к виду, удовлетворяющему требованиям теории и методики укрупнённых дидактических единиц. Как общие соображения, приведённые в начале данной статьи, так и перечень умственных действий, выполняемых при работе с конкретной УДЕ, позволяют сделать следующий вывод: применение методики УДЕ объективно означает воспроизведение в процессе преподавания важных свойств математических исследований. По-видимому, для математики в полной мере справедлива мысль Дж. Брунера, высказанная им об изучении физики: «Школьник, изучающий физику, *является* физиком, и для него легче изучать науку, действуя подобно учёному-физику…» [2.С.17].

Литература

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Физматгиз, 1963. 444 с.
2. Брунер Дж. Процесс обучения. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962. 84 с.
3. Виленкин Н. Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. Часть I. М.: Просвещение, 1971. 350 с.
4. Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А. Задачи и упражнения по мате-

матическому анализу. М.: Изд-во МГУ, 1988. 416 с.
5. Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н. Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение, 1973. 255 с.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990. 624 с.
7. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1964. 479 с.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I. М.: Наука, 1966. 607 с.
9. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М.: Просвещение, 1986. 255 с.
10. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Теория и методика обучения математике в начальной школе. М.: Педагогика, 1988. 208 с.
11. Ястребов А. В. Научное мышление и учебный процесс – параллели и взаимосвязи. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997. 137 с.
12. Ястребов А. В. О некоторых российских педагогических концепциях в условиях американской системы образования // Ярославский педагогический вестник. 1997. № 3. С. 6-10.
13. Ястребов А. В. Об упражнениях, задачах и моделировании научных исследований // Проблемы повышения эффективности образовательного процесса в высших учебных заведениях. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997. С. 107-114.

В.А. Щенёв

Личностно-ориентированный характер курса “География Ярославской области”

Разработка проблемы личностно ориентированного (направленного) обучения становится центральным вопросом как педагогической теории, так и педагогической практики. В основе ведущихся поисков – освоение новых моделей обучения, одна из которых – личностно-направленное обучение. Оно позволяет уйти от нормативного характера образовательного процесса и придать ему ориентацию на личность ученика, его потребности и интересы, более полное удовлетворение разнообразных запросов обучаемых. В Законе “Об образовании” России самоопределение личности записано как приоритетная цель образования.

Однако в условиях массового обучения, различия индивидуальных особенностей учащихся, типов их мышления, структурных различий учебных курсов проблема эта сложна для решения.

В статье освещается первый опыт конструирования учебного курса как личностно-ориентированного на примере географии Ярославской области.

География относится к числу учебных предметов, имеющих относительно жёсткую, мало изменяемую структуру изложения (достаточно вспомнить страноведческую схему “природа – население – хозяйство”). В своей основе в ней излагаются установившиеся научные положения, которые не создают основы для многообразия точек зрения. Использование проблемной методики, дискуссионных способов обучения смягчают эту особенность, но основа всё же остаётся прежней.

Личность по С. Л. Рубинштейну – это способность человека занимать определённую позицию, и её формирование предполагает отбор определённого содержания изучаемого и способов его усвоения, соответствующей организации учебного процесса. В основе развития личности лежит удовлетворение её потребностей. Возникает необходимость критического анализа установок, сложившихся в прошлом, когда главным было усвоение знаний, умений и навыков.

Важнейшее, хотя и не единственное средство развития учащихся – содержание изучаемого. Курс географии своей области, рассматриваемый как региональный, располагает значительными возможностями для личностно-ориентированного обучения. Он удовлетворяет потребности учащихся в познании родного края, в эмоционально насыщенном материале, во многом соответствует собственным взглядам и убеждениям учащихся на окружающую действительность. Личностный компонент в этом курсе особенно значителен. Взгляд на географию своей области как личностно-ориентированный курс открывает новые возможности для конструирования учебного процесса, учитывающего современную образовательную ситуацию, в таком понимании курса очевидны определённые “точки роста” в развитии методики школьной географии в целом. Расширяется исследовательское поле поиска