бя есть цель и ты идешь к ней, наслаждаясь каждым днем. И второе: ты настолько счастлив, что тебе хочется такого же счастья друзьям и врагам, всем, кто тебя окружает. Я считаю последнее – настоящим счастьем.» (Лариса М. 1 курс, лицей.)

Наша работа по формированию коммуникативно-деятельностной личности лицеиста на основе текста еще не закончена, однако результат, к которому мы пришли после 1 года обучения, говорит о многом: учащиеся стали умело создавать устные и письменные высказывания на уроках литературы и русского языка.

Следует подчеркнуть, что они проявляют неподдельный интерес к учебному материалу, а это повлекло более осознанное восприятие ими получаемой информации. Совершеннее стали письменные и устные речевые опыты лицеистов. И, самое главное: учащиеся утвердились в мысли об ответственности за качество произнесенного слова.

В.Ф. Чаплыгин

О некоторых трудностях, возникающих при решении геометрических задач

Анализ результатов приемных экзаменов в университет, опыт работы со школьниками, слушателями подготовительных отделений, студентами-математиками, готовящими себя к педагогической деятельности, дает основания сделать вывод о том, что при решении текстовых задач учащиеся испытывают значительно больше трудностей, чем при решении уравнений и неравенств. Это отчасти объясняется тем, что для решения уравнений, неравенств или их систем можно использовать некоторый набор известных алгоритмов и приемов, так как сама задача уже формализована, математизирована, а для текстовой задачи математическую модель учащийся должен составить самостоятельно, поэтому задачи, в том числе геометрические, о которых пойдет речь, требуют существенно больших логических усилий. Мы коснемся здесь, в основном, задач на вычисление.

Решение более или менее серьезной задачи требует, во-первых, тщательного ее анализа. Учащийся должен ясно осознать, что же ему известно, как связаны между собой данные величины, какие следствия из них можно получить, что необходимо найти в задаче и что требуется для этого знать. Анализ при этом может носить не только однонаправленный характер (от данных величин к искомым или наоборот), но и встречный, когда движение совершается в двух противоположных направлениях.

Трудным моментом является выбор метода, который приведет к решению задачи наикратчайшим путем. Он, как правило, неоднозначен, и почти каждая задача допускает не одно решение (имеется в виду не результат, а процесс). Рассуждения, используемые для решения, могут быть чисто геометрическими или позаимствованными из алгебры или тригонометрии. К сожалению, приходится констатировать слабые знания учащимися простейших утверждений, фактов, формул. Они затрудняются в измерении углов, связанных с окружностью (вписанных, центральных, составленных хордой и касательной, образованных хордами, пересекающимися внутри окружности, или секущими, исходящими из одной точки вне окружности), не знают свойств касательных и секущих, вписанных и описанных многоугольников, теорем синусов и косинусов, связь значений тригонометрических функций с отношениями сторон прямоугольного треугольника. Хорошо известно, что немаловажную роль в решении геометрических задач имеет чертеж. Если он выполнен верно, то поможет в правильном выборе решения, если ошибочен – то может привести на ложный путь. Говоря об этом, мы не призываем к тому, чтобы включать в курс школьной геометрии как можно больше теорем (на все случаи жизни), а предлагаем создавать комплексы задач, сгруппированных по принципу общих идей или методов решения. Решая задачу, следует обращать внимание учащихся на моменты, помогающие правильно выбрать способ решения, прививать вкус к таким задачам, вселять веру в их творческие возможности, развивать логические способности и интуицию.

Приведем примеры задач, которые нам представляются интересными. Первые три задачи используют подобие.

Задача 1. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC=3$, $BC=2$ вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B и C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A. Найти площадь квадрата.

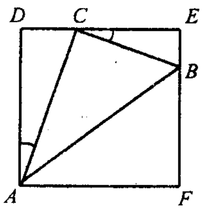

Рис.1

В силу равенства отмеченных углов (рис.1) треугольник ACD подобен треугольнику CBE $\Rightarrow$ $\frac{CE}{BC}=\frac{AD}{AC} \Rightarrow CE=\frac{2}{3}AB \Rightarrow DC=\frac{1}{3}AD$. Пусть $AD=x$, тогда $DC=\frac{1}{3}x$. Так как $AD^2+DC^2=AC^2$, то $x^2+\frac{1}{9}x^2=9$, $x^2=\frac{81}{10}$. Таким образом, площадь квадрата равна $\frac{81}{10}$.

Задача 2. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны соответственно точки E и F так, что $\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FD}=\frac{2}{3}$ и K - точка пересечения отрезков BF и AE. Найти отношение $KE:AK$.

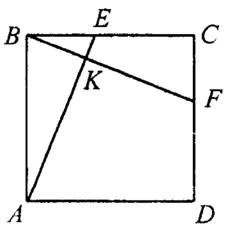

Рис.2

Из подобия треугольников (рис.2) AKB, BKE и ABE следует $\frac{BE}{AB}=\frac{KE}{BK}=\frac{BK}{AK}=\frac{2}{5}$. Перемножив равенства $\frac{KE}{BK}=\frac{2}{5}$ и $\frac{BK}{AK}=\frac{2}{5}$, получим $\frac{KE}{AK}=\frac{4}{25}$.

Эту задачу можно решить с помощью гомотетии или теоремы Фалеса, но, на наш взгляд, предложенное решение предпочтительнее.

Задача 3. Диаметр окружности с центром O лежит на стороне AD четырехугольника $ABCD$, при этом $AO=OD$. Три остальные стороны AB, BC и CD касаются этой окружности. Найти AD, если $AB=a$ и $CD=b$.

Пусть в треугольнике ABO (рис.3) $\angle BAO=\alpha$, $\angle ABO=\beta$, $\angle BOA=\gamma$ и, следовательно, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Так как BO - биссектриса угла CBA, то $\angle CBO=\beta$.

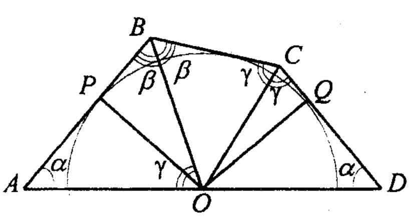

Рис.3

Если P и Q - точки касания, то $\Delta APO=\Delta DQO$ (они прямоугольные, $OP=OQ$, $AO=OD$) $\Rightarrow$ $\angle QDO=\angle PAO=\alpha$. Сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 2π, поэтому $\angle C=2\pi-2\alpha-2\beta$.

А так как CO - биссектриса, то $\angle DCO=\pi-(\alpha+\beta)=\gamma$. Таким образом, треугольники AOB и DCO подобны и $\frac{AO}{AB}=\frac{CD}{OD}$. Отсюда получаем равенства $AOOD=ABCD=ab$ $\Rightarrow$ $AO=OD=\sqrt{ab}$ и $AD=2\sqrt{ab}$.

А в следующих двух задачах учащиеся должны вспомнить свойства вписанных и описанных четырехугольников.

Задача 4. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана такая точка E, что $\frac{BE}{EC}=2$. Известно, что трапеция $AECD$ обладает следующими свойствами:

1) в нее можно вписать окружность;

2) около нее можно описать окружность.

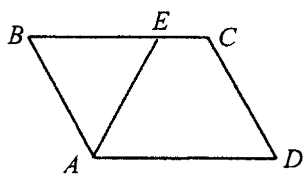

Рис.4

Найти величину угла BAD.

В силу свойств, которыми обладает трапеция $AECD$ (рис.4), она равнобокая ($AE=CD$) и $2AE=EC+AD$.

Пусть $BC=3a$, тогда $BE=2a$, $EC=a$ $\Rightarrow$ $2AE=EC+AD=4a$ $\Rightarrow$ $CD=AE=2a$. Таким образом, ΔBEA - равносторонний $\Rightarrow$ $\angle ABC=60°$ $\Rightarrow$ $\angle BAD=120°$.

Далеко не все учащиеся могут доказать, почему трапеция, около которой можно описать окружность, является равнобокой.

Задача 5. Сумма углов при основаниии BC трапеции $ABCD$ равна $\frac{4\pi}{3}$. Найти величину $\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}$, если известно, что $\frac{AD}{BC}+\frac{BC}{AD}=10$ и в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность.

Пусть $CF\|AB$ (рис.5), тогда $CF=AB$ и в силу условия задачи следует, что $\angle FCD=\frac{\pi}{3}$.

По теореме косинусов

$$FD^2=FC^2+CD^2-2FCCD\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

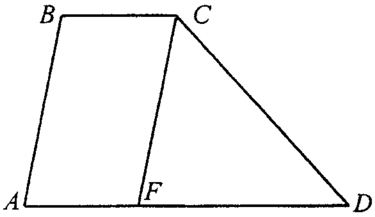

Рис.5

$(AD–BC)^2=AB^2+CD^2–AB\,CD$.

Так как в трапецию $ABCD$ можно вписать окружность, то $AD+BC=AB+CD$ $\Rightarrow$

$(AD+BC)^2=(AB+CD)^2$. **(2)**

Разделив равенство (1) на равенство (2), получим

$$\frac{AD^2-2AD\cdot BC+BC^2}{AD^2+2AD\cdot BC+BC^2}=$$
$$=\frac{AB^2+CD^2-AB\cdot CD}{AB^2+2AB\cdot CD+CD^2}$$

Разделив далее числитель и знаменатель левой дроби на произведение $ADBC$, а правой части - на $ABCD$, получим

$$\frac{\frac{AD}{BC}-2+\frac{BC}{AD}}{\frac{AD}{BC}+2+\frac{BC}{AD}}=\frac{\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}-1}{\frac{AB}{CD}+2+\frac{CD}{AB}}.$$

Откуда, положив $\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}=t$ и учитывая, что $\frac{AD}{BC}+\frac{BC}{AD}=10$, имеем $t=7$.

В этой задаче при неудачном выборе решения оно может оказаться очень громоздким.

Весьма поучительно, на наш взгляд, решение следующей задачи.

Задача 6. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена биссектриса CL и медиана CM. Найти площадь треугольника ABC, если $LM=a$, $CM=b$.

Пусть $AC=x$ и $BC=y$, где $x>y$ (рис.6), тогда $x^2+y^2=4b^2$, и по свойству биссектрисы $\frac{AL}{LB}=\frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $LB=\frac{y}{x+y}AB=\frac{2by}{x+y}$ и, следовательно, $ML=MB–LB=b-\frac{2by}{x+y}=\frac{b(x-y)}{x+y}$.

Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases}\frac{b(x-y)}{x+y}=a,\\ x^2+y^2=4b^2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\frac{b^2(x^2-2xy+y^2)}{x^2+2xy+y^2}=a^2,\\ x^2+y^2=4b^2\end{cases}\Rightarrow$$

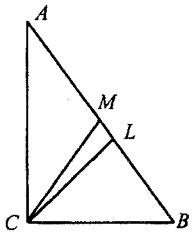

Рис.6

$$\frac{b^2(4b^2-2xy)}{4b^2+2xy}=a^2.$$

Решая это уравнение относительно xy, находим $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}xy=\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$.

Следует обратить внимание учащихся на то, что из полученной системы уравнений искать значения переменных x и y совершенно излишне.

Задача 7. Основание равнобедренного треугольника равно 10 см, проведенная к нему высота - 12 см. Вершины треугольника служат центрами кругов, каждый из которых касается двух других внешним образом. Найти радиусы кругов, которые касаются трех указанных кругов внешним и внутренним образом.

Пусть E, F, D, K, H - точки касания, радиус окружности с центром в точке O_1 равен r, а с центром в точке O_2 - R (рис.7). Так как $AD=5$, $AB=13$, то $BE=8$, $BO_1=8+r$, $AO_1=5+r$, $O_1D=4–r$.

Из прямоугольного треугольника AO_1D

$(5+r)^2=25+(4–r)^2$, $18r=16$, $r=\frac{8}{9}$.

$BO_2=R–8$, $O_2D=12–(R–8)=20–R$, $O_2A=R–5$, и, следовательно, из прямоугольного треугольника AO_2D имеем

$$(R–5)^2=(20–R)^2+25 \Rightarrow R=\frac{40}{3}=13\frac{1}{3}.$$

Здесь следует напомнить учащимся, что прямая, проходящая через центры двух касающихся окружностей, проходит через точку их касания.

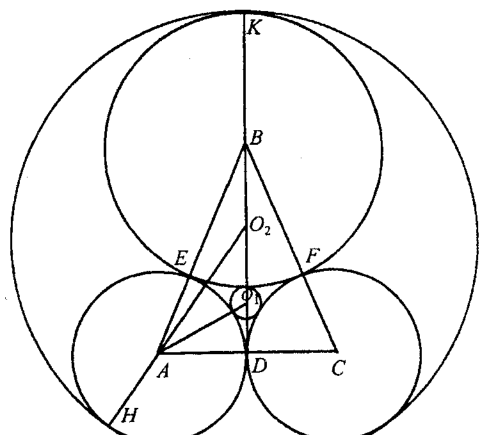

Рис.7

В заключение приведем одну задачу на доказательство, которая требует от учащихся достаточно высокой логической культуры.

Задача 8. Докажите, что треугольник является равнобедренным в том и только в том случае, когда равны биссектрисы двух внутренних углов.

Если в треугольнике ABC (рис.6) $AB=BC$, то углы A и C равны и равны треугольники BAE и BCD, так как $\angle B$ - общий и $\angle BAE=$-$=\angle BCD$, следовательно, $AE=CD$.

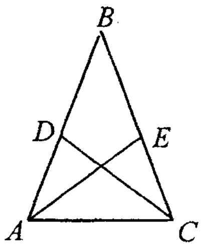

Рис.8

Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть биссектрисы AE и CD углов A и C треугольника ABC равны. Докажем, что $\angle A=\angle C$.

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BAE}+S_{\Delta EAC}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}ABAC\sin A=\frac{1}{2}ABAE\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}AEAC\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow 2ABAC\cos\frac{A}{2}=(AB+AC)AE \Rightarrow$$

$$AE=\frac{2AB\cdot AC\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на произведение $ABAC$ и обозначив $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, получим $AE=\dfrac{2\cdot\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, аналогично, биссектриса $CD=\dfrac{2\cdot\cos\frac{C}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$. Если допустить, что $\angle A\neq\angle C$, например, $\angle A<\angle C$, то $\cos\frac{A}{2}>\cos\frac{C}{2}$ и $a<c$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$ $\Rightarrow$ $AE>CD$, получили противоречие.

Приведенные в статье задачи предлагались на вступительных экзаменах в различных вузах России, в том числе и в Ярославском госуниверситете.

Литература

1. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961. 207 с.
2. Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1997. 323с.
3. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи вступительных экзаменов по математике. Ярославль, 1991. 140с.
4. Чаплыгин В.Ф. Чаплыгина Н.Б. Задачи вступительных экзаменов по алгебре и геометрии. Ярославль, 1999. 112с.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. А. И. Прилепко. М.: Высшая школа, 1989. 271с.
6. Зафиевский А.В.. Вступительные экзамены по математике в 1998 году. Ярославль, 1999. 36с.
7. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.Н. Задачи по элементарной математике. М.: Физматгиз, 1960. 463с.

В. В. Секацкий, Г. И. Худякова

Элементы теории матричных игр в курсе математики

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели принятия оптимальных решений в условиях неопределенности.

Истоки ее можно найти еще в работах Б.Паскаля. В 1921 году Э.Борель изучал матричные игры. Начало современной теории игр относят к 1928 году, когда была опубликована работа Дж. Неймана «К теории стратегических игр». Помимо разнообразных связей внутри математики, теория игр получила многообразные приложения в других отраслях знаний, особенно в военном деле и капиталистической экономике. При переходе к рынку в нашей стране элементы теории игр стали в обязательном порядке входить в учебные планы подготовки специалистов финансово-экономического профиля.

Несмотря на обширную научную литературу по теории игр, доступные учебные пособия для студентов (курсантов) экономических вузов явно редки.

В данной работе авторы пытаются в какой-то мере восполнить этот пробел, главным образом рассчитывая на внимание преподавателей и курсантов ЯВВФЭУ и студентов естественно-научных специальностей педвузов.

Для простоты мы не будем использовать