В заключение приведем одну задачу на доказательство, которая требует от учащихся достаточно высокой логической культуры.

Задача 8. Докажите, что треугольник является равнобедренным в том и только в том случае, когда равны биссектрисы двух внутренних углов.

Если в треугольнике ABC (рис.6) $AB=BC$, то углы A и C равны и равны треугольники BAE и BCD, так как $\angle B$ - общий и $\angle BAE=\angle BCD$, следовательно, $AE=CD$. Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть биссектрисы AE и CD углов A и C треугольника ABC равны. Докажем, что $\angle A=\angle C$.

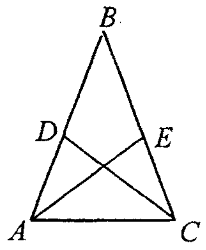

Рис.8

$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BAE}+S_{\Delta EAC}$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}AB AC\sin A=\frac{1}{2}AB AE\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}AE AC\sin\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow 2AB AC\cos\frac{A}{2}=(AB+AC)AE \quad \Rightarrow$$

$$AE=\frac{2AB\cdot AC\cos\frac{A}{2}}{AB+AC}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби на произведение $ABAC$ и обозначив $AB=c$, $AC=b$, $BC=a$, получим $AE=\dfrac{2\cdot\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$, аналогично, биссектриса $CD=\dfrac{2\cdot\cos\frac{C}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$. Если допустить, что $\angle A\neq\angle C$, например, $\angle A<\angle C$, то $\cos\frac{A}{2}>\cos\frac{C}{2}$ и $a<c$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$ $\Rightarrow$ $AE>CD$, получили противоречие.

Приведенные в статье задачи предлагались на вступительных экзаменах в различных вузах России, в том числе и в Ярославском госуниверситете.

Литература

1. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961. 207 с.
2. Смирнов Е.И. Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1997. 323с.
3. Чаплыгин В.Ф., Чаплыгина Н.Б. Задачи вступительных экзаменов по математике. Ярославль, 1991. 140с.
4. Чаплыгин В.Ф. Чаплыгина Н.Б. Задачи вступительных экзаменов по алгебре и геометрии. Ярославль, 1999. 112с.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. А. И. Прилепко. М.: Высшая школа, 1989. 271с.
6. Зафиевский А.В.. Вступительные экзамены по математике в 1998 году. Ярославль, 1999. 36с.
7. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.Н. Задачи по элементарной математике. М.: Физматгиз, 1960. 463с.

В. В. Секацкий, Г. И. Худякова

Элементы теории матричных игр в курсе математики

Теория игр – это раздел математики, изучающий математические модели принятия оптимальных решений в условиях неопределенности.

Истоки ее можно найти еще в работах Б.Паскаля. В 1921 году Э.Борель изучал матричные игры. Начало современной теории игр относят к 1928 году, когда была опубликована работа Дж. Неймана «К теории стратегических игр». Помимо разнообразных связей внутри математики, теория игр получила многообразные приложения в других отраслях знаний, особенно в военном деле и капиталистической экономике. При переходе к рынку в нашей стране элементы теории игр стали в обязательном порядке входить в учебные планы подготовки специалистов финансово-экономического профиля.

Несмотря на обширную научную литературу по теории игр, доступные учебные пособия для студентов (курсантов) экономических вузов явно редки.

В данной работе авторы пытаются в какой-то мере восполнить этот пробел, главным образом рассчитывая на внимание преподавателей и курсантов ЯВВФЭУ и студентов естественно-научных специальностей педвузов.

Для простоты мы не будем использовать

понятия супремум (Sup) и инфимум (Inf) функции, заменяя их соответственно максимумом (max) и минимумом (min), тем более, что в рассматриваемых нами конкретных моделях функции будут заданы либо на конечном множестве, либо определены и непрерывны на ограниченных замкнутых множествах. Так что максимумы и минимумы существуют.

§1. Модель антагонистической игры

Конфликтные ситуации возникают не только в быту, но и в производственных, экономических, военных отношениях. Участники конфликта называются сторонами или игроками. Мы рассмотрим случай двух игроков. У каждого игрока имеется набор допустимых стратегий, то есть планов поведения.

Обозначим стратегию, выбранную первым игроком, символом x, а множество всех его возможных стратегий X. Для второго игрока выбранную стратегию обозначим y, а множество стратегий $У$. Пару (x, y) называют ситуацией. Степень удовлетворенности игрока этой ситуацией выражается функцией выигрыша: для первого игрока $H_1(x, y)$, а для второго - $H_2(x,y)$.Рассмотрим простейший случай, когда $H_1(x, y)+H_2(x, y)=0$, так называемую антагонистическую игру с нулевой суммой. В таком случае выигрыш первого игрока можно обозначить $H(x, y)$, а второго $-H (x, y)$, то есть выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Итак, для задания модели такой игры необходимо и достаточно иметь множество X допустимых стратегий первого игрока, множество $У$ допустимых стратегий второго игрока и действительную функцию $H(x,y)$, где (x, y) – любая пара допустимых стратегий.

Что значит решить игру? Это зависит от выбора критерия оценки своей стратегии каждым игроком и степени информированности о поведении противника.

Примем следующую схему поведения и информированности игроков:

Каждому игроку известны множества X, $У$ и функция H.

Если первый игрок выбрал стратегию $x \in X$ и второму это известно, то второй будет стремиться к выбору стратегии $y(x)$, минимизирующей функцию $H(x, y)$ (свой проигрыш), то есть

$$v_1(x) = \min_{y\in Y} H(x,y) = H(x,y(x)), \qquad (1)$$

где $v_1(x)$ – минимальный проигрыш второго игрока при выборе первым стратегии x. Этот проигрыш (наиболее благоприятный) для второго игрока обеспечивает ему стратегия $y(x)$, зависящая от x.

Для первого игрока $v_1(x)$ есть гарантированный выигрыш при выборе им стратегии x. Теперь, естественно, он будет стремиться к выбору стратегии x_0, при которой $v_1(x)$ будет максимальным:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_1(x_0) = \max_{x\in X} v_1(x) = \\ &= \max_{x\in X} H(x,y(x)) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} H(x,y) \end{aligned} \qquad (2)$$

Стратегия x_0 называется максиминной, а $v_0(x)$ - нижней ценой игры.

Аналогичные рассуждения проводятся для второго игрока. Если он выбрал стратегию y, то первый выберет $x(y)$, чтобы получить максимум $H(x, y)$:

$$v_2(y) = \max_{x\in X} H(x,y) = H(x(y),y) \qquad (3)$$

$v_2(y)$- это максимально возможный проигрыш второго игрока при выборе им стратегии y. Естественно, он будет искать стратегию y^0, доставляющую минимум функции $v_2(y)$:

$$\begin{aligned} v^0 &= v_2(y^0) = \min_{y\in Y} v_2(y) = \\ &= \min_{y\in Y} H(x(y),y) = \min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,y) \end{aligned} \qquad (4)$$

Стратегия y^0 называется минимаксной, а v^0 - верхней ценой игры.

Стратегии x^*, y^* называются оптимальными, если

$$\begin{aligned} &H(x,y^*) \le H(x^*,y^*) \le H(x^*,y) \\ &\text{при } \forall x \in X \text{ и } \forall y \in Y, \end{aligned} \qquad (5)$$

$H(x^*,y^*) = v$ называют ценой игры, а пару (x^*, y^*) – седловой точкой.

Решить игру – значит найти ее оптимальные стратегии x^*, y^* и цену v.

Если оптимальные стратегии существуют, игра называется разрешимой, в противном случае – неразрешимой.

Соотношение (5) показывает, что уклоняться от оптимальных стратегий невыгодно каждому игроку: у первого может уменьшиться выигрыш, а у второго - увеличиться проигрыш.

Теперь естественно поставить вопрос о разрешимости игры в указанной схеме.

§ 2. Условия разрешимости игры

Теорема 1. Нижняя цена игры не превосходит верхнюю, то есть $v_0 = v^0$.

Доказательство. Из (1) следует

$$v_1 = \min_{y\in Y} H(x,y) \le H(x,y) \, при \forall y \in Y$$

(6)

Неравенство сохраняется, если взять от каждой части максимум по $x \in X$. Учтем также (2) и (3).

$$v_0 = v_1(x_0) = \max_{x\in X} v_1(x) \le \max_{x\in X} H(x,y) =$$
$$= v_2(y)\, при\, \forall y \in Y$$

Положим в последнем y=y0 и учтем (4)

$$v_0 \le v_2(y^0) = v^0.$$

Доказательство закончено.

Теорема 2. Цена игры v (если она существует) удовлетворяет неравенству:

$$v_0 \le v \le v^0.$$

Доказательство. По определению

$$H(x,y^*) \le v = H(x^*,y^*) \le H(x^*,y)$$
$$(\forall x \in X, \forall y \in Y) \Rightarrow v_1(x) = \min_{y\in Y} H(x,y) \le$$
$$\le H(x,y^*) \le v \le H(x^*,y) \le \max_{x\in X} H(x,y) = v_2(y)$$

Подставим x=x0, y=y0:

$$v_0 = v_1(x_0) \le v \le v_2(y^0) = v^0.$$

Теорема 3. Для того, чтобы игра была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы

v0=v0.

Доказательство достаточности. Обозначим v=v0=v0.

Поставим в (6) x=x0

$$v = v_1(x_0) \le H(x_0,y), \forall y \in Y \tag{7}$$

Взяв в последнем y=y0, получим

$$v \le H(x_0,y^0) \tag{8}$$

Аналогично из (3) следует

$$H(x,y) \le v_2(y)\ (\forall x \in X, \forall y \in Y)$$

Положив в последнем сначала y=y0, а затем x=x0, получим

$$H(x,y^0) \le v_2(y^0) = v, \tag{9}$$
$$H(x_0,y^0) \le v. \tag{10}$$

Из (7) - (10) следует

$$H(x,y^0) \le v = H(x_0,y^0) \le H(x_0,y),$$

то есть игра разрешима и $(x^*,y^*) = (x_0,y^0)$.

Доказательство необходимости. По условию оптимальное решение существует:

$$H(x,y^*) \le v = H(x^*,y^*) \le H(x^*,y)$$
$$(\forall x \in X, \forall y \in Y) \Rightarrow v_2(y^*) = \max_{x\in X} H(x,y^*) =$$
$$= H(x(y^*),y) \le v \le \min_{y\in Y} H(x^*,y) = \tag{11}$$
$$= H(x^*,y(x^*)) = v_1(x^*) \Rightarrow v_2(y^*) \le v \le v_1(x^*)$$

Так как

$$v^0 = v_2(y^0) = \min v_2(y),$$

то

$$v^0 = v_2(y^0) \le v_2(y^*). \tag{12}$$

Аналогично показывается, что

$$v_1(x^*) \le v_0 = v_1(x_0). \tag{13}$$

Из (11), (12), (13) следует

$$v^0 = v_2(y^0) \le v_2(y^*) \le v \le v_1(x^*) \le$$
$$\le v_1(x_0) = v_0$$

.

С учетом теоремы 1 из последнего соотношения получаем

$$v_0 = v = v^0 = v_2(y^0) =$$
$$= v_2(y^*) = v_1(x_0) = v_1(x^*) \tag{14}$$

Доказательство закончено.

Замечание 1. В равенстве (14) (x_0, y^0) и (x^*, y^*) образуют пары оптимальных стратегий, но эти пары не обязательно совпадают.

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 следует необходимое и достаточное условие оптимальности максиминной и минимаксной стратегий. Это условие заключается в том, чтобы выполнялось равенство $v_0=v^0$.

§ 3. Модель матричной игры в чистых стратегиях

Пусть множества стратегий обоих игроков конечны: X состоит из m стратегий, а Y из n. Эти стратегии называются чистыми. Обозначим их порядковыми номерами: $X=\{1, 2, \ldots, i, \ldots, m\}$, $Y=\{1, 2, \ldots, j, \ldots, n\}$.

Ситуация задается парой (i, j), а функция выигрыша H описывается матрицей A с элементами $a_{ij} = H(i, j)$:

$A=(a_{ij})$, $i=1, 2, \ldots, m$; $j=1, 2, \ldots, n$.

$v_1(i) = \min_j a_{ij}$ ….- минимальный элемент в i-й строке матрицы.

$v_0 = \max_i v_1(i)$ - максимальный элемент среди минимальных в каждой строке.

Номер i_0 строки, на которой достигается этот максимум, будет максиминной стратегией.

Аналогично $v_2(j) = \max_i a_{ij}$ - максимальный элемент в j-м столбце, а $v^0 = \min_j v_2(j)$ - минимальный среди них. Соответствующий столбец j_0 определяет минимаксную стратегию.

По теореме 3 игра в чистых стратегиях разрешима тогда и только тогда, когда

$$v_0 = v^0 = v = a_{i_0 j_0}.$$

(i_0, j_0) - седловая точка, $a_{i_0 j_0}$ - элемент матрицы, минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце. Элемент с таким свойством называется седловым элементом матрицы. Так что для данной модели теорему 3 можно перефразировать так:

Теорема 3*. Для того, чтобы матричная игра была разрешима в чистых стратегиях, необходимо и достаточно, чтобы в матрице A существовал седловой элемент.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \max\{1, 4, 0\} = 4, \quad i_0 = 2;$$

$$v^0 = \min\{8, 7, 4\} = 4, \quad j_0 = 3;$$

$$v = a_{23} = 4.$$

Контрпример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \max\{1,2,1\} = 2, \quad i_0 = 2;$$

$$v^0 = \min\{7,7,6\} = 6, \quad j_0 = 3;$$

$$v_0 \neq v^0, \quad a_{i_0 j_0} = a_{23} = 4.$$

Стратегии i_0, j_0 нельзя считать оптимальными, так как первый игрок может рассчитывать на выигрыш больший, чем v_0, а второй на проигрыш меньший, чем v^0.

Выбор конкретных фиксированных чистых стратегий не удовлетворит игроков. Действительно, если первый зафиксирует стратегию $i_0 = 2$, то второй откажется от $j_0 = 3$ и выберет $j = 1$. Такое же поведение будет характерно и для другого игрока. Следовательно, чистые стратегии будут избираться неким случайным образом.

§4. Матричные игры в смешанных стратегиях

Расширим понятие стратегии, данное в предыдущей модели.

Чистые стратегии 1, 2, …, m первого игрока будем рассматривать как значения некоторой случайной величины, принимаемые с вероятностями соответственно $x_1, x_2, \ldots, x_m$, где $x_i \geq 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1.$

Вероятностный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ будем называть смешанной стратегией первого игрока. Таким образом, выбор смешанной стратегии при осуществлении игры означает, что реализоваться может любая чистая стратегия, но с заданной вероятностью. Выбор другой смешанной стратегии означает лишь, что распределение вероятностей будет другим. Чистую стратегию i можно рассматривать как частный случай смешанной, для которой $x_i = 1$ и $x_k = 0$ при $k \neq i$.

Множество всех смешанных стратегий первого игрока обозначим X, то есть

$$X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \mid x_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$$

Аналогично для второго игрока смешанная стратегия – это n– мерный вероятностный вектор $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, а множество всех смешанных стратегий Y:

$$Y = \{y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \mid y_j \geq 0, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Пара (x, y) образует игровую ситуацию, при которой пара (i, j) чистых стратегий может реализоваться с вероятностью $p_{ij} = x_i \cdot y_j$.

Такую же вероятность, следовательно, будет иметь и значение a_{ij} выигрыша. «Средним значением» выигрыша будет математическое ожидание значений a_{ij}, то есть

$$H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i y_j.$$

Функцию $H(x, y)$ примем за функцию выигрыша первого игрока.

Модель построена. Для решения игры надо найти оптимальные стратегии x^*, y^* и цену игры $v=H(x^*,y^*)$.

Примем пока без доказательства

Теорему Неймана. Всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.

Как и прежде, через A обозначим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

$$i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Стратегию x будем представлять вектором (матрицей) строкой, а y – столбцом. Тогда

$$H(x,y) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_{11} \ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{m1} \ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = x \cdot A \cdot y. \qquad (15)$$

§ 5. Упрощение матричной игры

Из двух чистых стратегий s и i для первого игрока s называется доминирующей, а i доминируемой, если

$$a_{sj} \ge a_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Стратегия s всегда обеспечивает выигрыш не меньший, чем стратегия i, и, следовательно, i-ю стратегию можно исключить вместе с соответствующей строкой матрицы A.

Из двух стратегий p и q второго игрока p называется доминирующей, q доминируемой, если

$$a_{ip} \le a_{iq}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Стратегия q не будет использоваться игроком, так как она обеспечивает проигрыш не меньший, чем при стратегии p. Стратегия q исключается вместе с соответствующим столбцом матрицы A.

Теорема 4. Если x^*, y^* - оптимальные смешанные стратегии для игры с матрицей A и ценой v, то они также будут оптимальными для игры с матрицей $B = \alpha \cdot A + \beta \cdot E$ $(\alpha > 0)$ и ценой $v' = \alpha \cdot v + \beta$, где E матрица размером $m \times n$, все элементы которой равны 1.

Доказательство. Заметим прежде, что

$$x \cdot E = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \cdot \begin{pmatrix} 11\ldots1 \\ 11\ldots1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 11\ldots1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1, \ldots, 1) \in R^n, \quad \text{т к. } x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1.$$

Следовательно,

$$x \cdot E \cdot y = 1, \quad \forall x \in X, \forall y \in Y. \tag{16}$$

По условию

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) = v \le H(x^*, y)$$

или

$$x \cdot A \cdot y^* \le x^* \cdot A \cdot y^* = v \le x^* \cdot A \cdot y.$$

Умножим последнее на $\alpha > 0$

$$x \cdot \alpha \cdot A \cdot y^* \le x^* \cdot \alpha \cdot A \cdot y^* = \alpha \cdot v \le x^* \cdot \alpha \cdot A \cdot y. \tag{17}$$

Из (16) получим

$$x \cdot \beta \cdot E \cdot y^* = x^* \cdot \beta \cdot E \cdot y^* = \beta =$$

$$= x^* \cdot \beta \cdot E \cdot y.$$

Складываем почленно последнее с (17)

$$x \cdot (\alpha \cdot A + \beta \cdot E) \cdot y^* \le$$

$$\le x^* \cdot (\alpha \cdot A + \beta \cdot E) \cdot y^* =$$

$$= \alpha \cdot v + \beta \le x^* \cdot (\alpha \cdot A + \beta \cdot E) \cdot y.$$

или

$$x \cdot B \cdot y^* \le x^* \cdot B \cdot y^* =$$

$$= \alpha \cdot v + \beta \le x^* \cdot B \cdot y,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. При желании элементы матрицы A всегда можно заменить на положительные:

$$A \to A + \beta \cdot E, \quad \text{где } \beta > |a_{ij}|$$

для всех неположительных элементов a_{ij}.

Теорема 5. Если матрица A положительна (все ее элементы положительны), то для любых смешанных стратегий игроков выполняются неравенства

$$0 < \delta_1 \le a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \le \delta_2, \quad j = \overline{1, n};$$

$$0 < \delta_1 \le a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \le \delta_2, \quad i = \overline{1, m},$$

где $\delta_1 = \min\limits_{i,j} a_{ij}$,

$\delta_2 = \max\limits_{i,j} a_{ij}$.

Доказательство очевидно вытекает из свойств вероятностного вектора.

§6. Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Рассмотрим две задачи I и II, считая матрицу A положительной.

Задача I.

Найти вероятностный вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge v, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge v. \end{cases} \tag{18}$$

и максимизирующий значение v: $v \to max$.

В силу теоремы 5 система (18) совместна и $\delta_1 \le v \le \delta_2$. Обозначая $t_i = \frac{x_i}{v}$ и учитывая, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$, задачу I можно привести к виду

$$\begin{cases} a_{11}t_1 + a_{21}t_2 + \ldots + a_{m1}t_m \ge 1, \\ a_{12}t_1 + a_{22}t_2 + \ldots + a_{m2}t_m \ge 1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{1n}t_1 + a_{2n}t_2 + \ldots + a_{mn}t_m \ge 1, \\ t_1, t_2, \ldots, t_m \ge 0, \\ F = t_1 + t_2 + \ldots + t_m = \dfrac{1}{v} \to \min. \end{cases} \tag{I}$$

Задача II.

Найти вероятностный вектор $y = (y_1, y_2,$

$\ldots, y_n$), удовлетворяющий системе

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le v, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le v. \end{cases} \quad (19)$$

и минимизирующий значение $v : v \to min$.

Заметим, что v в задачах I и II совершенно самостоятельные величины, хотя и удовлетворяют одинаковым ограничениям

$$\delta_1 \le v \le \delta_2.$$

Вводя обозначения $s_j = \dfrac{y_j}{v}$, аналогичным образом задачу II приведем к виду

$$\begin{cases} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + \ldots + a_{1n}s_n \le 1, \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + \ldots + a_{2n}s_n \le 1, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + \ldots + a_{mn}s_n \le 1, \\ s_1, s_2, \ldots, s_n \ge 0, \\ \Phi = s_1 + s_2 + \ldots + s_n = \dfrac{1}{v} \to \max. \end{cases} \quad (II)$$

Задачи I и II – это взаимодвойственные задачи линейного программирования. Причем легко видно, что области допустимых значений у них не пусты, целевые функции ограничены. Следовательно, задачи I и II имеют оптимальные решения $t^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*)$ и $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, на которых целевые функции имеют одинаковые значения $F(t^*) = \Phi(s^*) = \dfrac{1}{v^*}$.

Решениям t^* и s^* соответствуют вероятностные векторы $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ и $y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$.

Поставим v^* и x^* в (18)

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{21}x_2^* + \ldots + a_{m1}x_m^* \ge v^*, \\ a_{12}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{m2}x_m^* \ge v^*, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots, \\ a_{1n}x_1^* + a_{2n}x_2^* + \ldots + a_{mn}x_m^* \ge v^*. \end{cases}$$

Умножая первое неравенство на y_1, второе на y_2 и т. д., последнее на y_n и почленно складывая, получим

$$H(x^*, y) = x^* \cdot A \cdot y \ge v^* y_1 + \\ + v^* y_2 + \ldots + v^* y_n = v^*,$$

короче

$$H(x^*, y) \ge v^*.$$

Аналогичным образом из системы (19) получим

$$H(x, y^*) \le v^*.$$

Объединим последние неравенства

$$H(x, y^*) \le v^* \le H(x^*, y). \quad (20)$$

Поставим в (20) $x=x^*$, $y=y^*$

$$H(x^*, y^*) \le v^* \le H(x^*, y^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow v^* = H(x^*, y^*)$$

Таким образом, (20) принимает вид

$$H(x, y^*) \le H(x^*, y^*) = v^* \le H(x^*, y).$$

Тем самым не только доказана теорема Неймана о том, что всякая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях, но и указан метод нахождения оптимальных стратегий путем решения взаимнодвойственных задач I и II линейного программирования.

Литература

1. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Минск: Высшая школа, 1994.
2. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. М.: Высшая школа, 1980.
3. Секацкий В.В. Об одном геометрическом аспекте теории линейного программирования // Математические методы в экономике. Межвузовский сборник статей. Ярославль: ЯВВФУ, 1997. С. 42-44.

А. Ю. Мазилова

Сочинение как вступительный экзамен по русскому языку и литературе

Кто не знает, что такое школьное сочинение? Всем когда-то приходилось писать его – легко и с удовольствием или с мучительными попытками угадать, что же ей (учительнице) надо. Сколько недоразумений, споров, разочарований возникает ежегодно во время работы медальных комиссий и вступительных экзаме-