В.В. Афанасьев, И.В. Новожилова

Вероятностные игры

Введение

Идея вероятности — одна из основополагающих и интригующих идей, лежащих в фундаменте современной науки. Лаплас называл теорию вероятностей «здравым смыслом, сведенным к исчислению», и говорил, что «нет науки, более достойной наших размышлений», и что «было бы полезно ввести ее в систему народного просвещения». Этот призыв был наконец-то услышан в нашем обществе, и в «Концепции структуры и содержания общего среднего образования» провозглашено, что «обновление содержания математики связано прежде всего с введением в школьный курс вероятностно-статистического материала, необходимого для жизни в современном обществе».

Зарождение математического учения о вероятности относится к XVII веку, когда было положено начало разработке основных понятий, выражающих вероятностную идею. В качестве базовых моделей в разработке языка теории вероятностей выступали модели азартных игр. Схемы этих игр, как отмечает Е.С. Вентцель [3], дают достаточно простые модели теоретико-вероятностных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой и наглядной форме наблюдать и изучать исходные закономерности соответствующих процессов.

Теория вероятностей стала важной наукой нашего времени, которое характеризуется бурным проникновением вероятностно-статистических методов практически во все области деятельности человека. В наши дни ни один конкурс, ни одно соревнование не обходится без того, чтобы случай определил порядок выступления участников. Жребий — это самый простой и удобный способ выхода из конфликтных ситуаций. Поэтому в качестве экскурса в историю развития науки и примера практической значимости теории вероятностей предлагаем вниманию набор задач, в которых осуществляется поиск стратегии игры для участников той или иной жеребьевки. Для решения этих задач удобно использовать вероятностные графы, так как это делает их, по нашему мнению, более наглядными и доступными. Приведем некоторые основные понятия, определения и теоремы, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Действие или явление с несколькими различными исходами будем называть **испытанием**. Рассматриваемые исходы испытания будем считать **равновозможными**, если они имеют равные шансы произойти, и попарно несовместными,если любые два из них не могут произойти одновременно в данном испытании. Результат испытания будем называть **случайным событием**. Событие называется **достоверным**, если оно обязательно происходит при данном испытании. Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти при данном испытании. Событие обозначают заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C\ldots$

Вероятностью $P(A)$ события A называется число, равное отношению числа m исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n всех равновозможных и несовместных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Свойства вероятностей:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A — невозможное событие;
3. $P(A) = 1$ тогда и только тогда, когда A — достоверное событие;

4. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, если A, B — несовместные события;

5. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, где $\bar{A}$ — событие, противоположное А.

Теорема сложения. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Условной вероятностью $P(A/B)$ события A при условии, что событие B произошло ($P(B) \neq 0$), будем называть отношение $P(A \cdot B)/P(B)$.

Отсюда $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$, то есть вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого, при условии выполнения первого.

Граф — это множество вершин и ребер, которые соединяют не более двух вершин. Граф **связный**, если из любой вершины в любую другую можно пройти по ребрам. **Цикл** — замкнутый путь из ребер. **Деревом** называется связной граф без циклов. Граф называется **вероятностным**, если рядом с каждым его ребром записать вероятность события, соответствующего конечной вершине этого ребра, при условии выполнения события, соответствующего начальной вершине ребра(ориентация графа задается, например, на дереве расстоянием от его корня).

§1. Игры с выбором при помощи «считалки»

Дежурный по классу определяется из нескольких человек при помощи «считалки». Участники игры считают до числа, которое оказалось суммой положительных чисел «выброшенных» пальцев одной руки каждого. Тот, на котором остановился счет, выходит, а оставшиеся продолжают игру до тех пор, пока не останется один из участников, который и будет дежурить. Является ли такой выбор случайным и справедливым?

Пример 1. Определить шансы на дежурство каждого участника игры — «считалки», если в ней принимают участие два человека.

Решение: Заметим, что первый, с кого начинается счет, не убирает класс, если сумма «выброшенных» пальцев окажется нечетной, а второй — если четной. Составим вероятностное дерево исходов (рис.1).

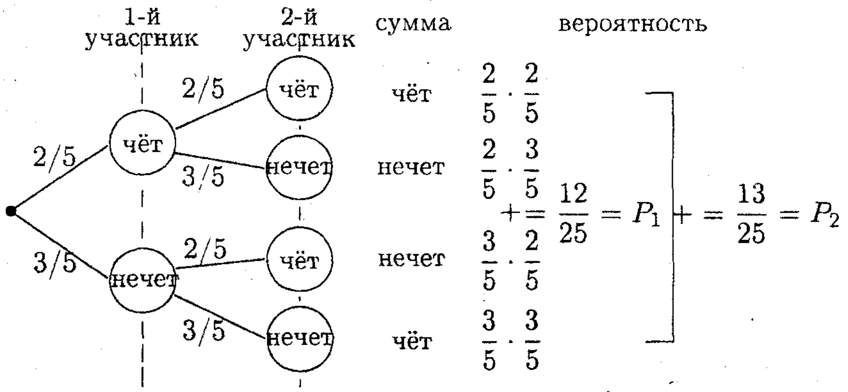

Рис.1

P_1 — вероятность дежурства первого участника, а P_2 — вероятность дежурства второго участника. С учетом того, что $P_1 = 13/25 > P_2 = 12/25$, участнику игры можно рекомендовать в этом случае стоять вторым.

Пример 2. Определить шансы участников на дежурство, если в игре принимают участие три человека.

Решение: Заметим, что первый, с кого начинается счет, выйдет при первом счете, если сумма «выброшенных» пальцев окажется равной 4, 7, 10 или 13, второй – если 5, 8, 11 или 14, а третий – если 3, 6, 9, 12 или 15 (рис.2).

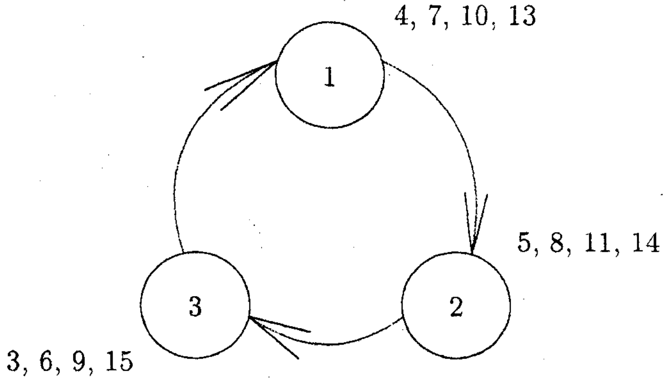

Рис.2

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих каждому из участников (табл.1).

Таблица 1

№ участника	Сумма «выброшенных» пальцев рук	Возможные комбинации	Число исходов	
1	4	$1+1+2$	$A_3^1 = 3$	
	7	$1+1+5$	$A_3^1 = 3$	
		$1+2+4$	$P_3 = 6$	
		$1+3+3$	$A_3^1 = 3$	
		$2+2+3$	$A_3^1 = 3$	
	10	$1+4+5$	$P_3 = 6$	
		$2+3+5$	$P_3 = 6$	
		$2+4+4$	$A_3^1 = 3$	
		$3+3+4$	$A_3^1 = 3$	
	13	$3+5+5$	$A_3^1 = 3$	
		$4+4+5$	$A_3^1 = 3$	42 исхода
2	5	$1+1+3$	$A_3^1 = 3$	
		$1+2+2$	$A_3^1 = 3$	
	8	$1+2+5$	$P_3 = 6$	
		$1+3+4$	$P_3 = 6$	
		$2+2+4$	$A_3^1 = 3$	
		$2+3+3$	$A_3^1 = 3$	
	11	$1+5+5$	$A_3^1 = 3$	
		$2+4+5$	$P_3 = 6$	
		$3+3+5$	$A_3^1 = 3$	
		$3+4+4$	$A_3^1 = 3$	
	14	$4+5+5$	$A_3^1 = 3$	42 исхода
3	3	$1+1+1$	1	
	9	$1+3+5$	$P_3 = 6$	
		$1+4+4$	$A_3^1 = 3$	
		$2+2+5$	$A_3^1 = 3$	
		$2+3+4$	$P_3 = 6$	
		$3+3+3$	1	
	12	$2+5+5$	$A_3^1 = 3$	
		$3+4+5$	$P_3 = 6$	
		$4+4+4$	1	
	15	$5+5+5$	1	41 исход

Итак, вероятности выйти в первом туре каждого из участников игры соответственно равны $\frac{42}{125}$, $\frac{42}{125}$ и $\frac{41}{125}$. Шансы выйти во втором туре игры для двух оставшихся участников из предыдущего примера находятся как $\frac{12}{25}$ и $\frac{13}{25}$. Составим вероятностное дерево исходов для трех участников (рис.3).

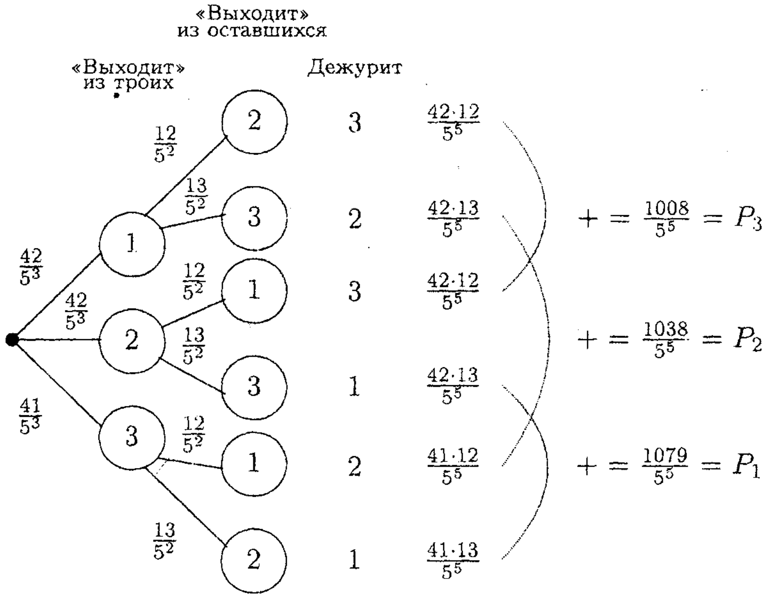

Рис.3

$P_1 > P_2 > P_3$ и, следовательно, участнику игры можно посоветовать в этом случае встать третьим или в крайнем случае вторым.

Пример 3. Определить шансы участников на дежурство для четырех участников игры — «считалки».

Решение: Первый, с кого начинается счет, выйдет в первом туре игры, если сумма «выброшенных» пальцев окажется 5, 9, 13 или 17, второй — если 6, 10, 14 или 18, третий — если 7, 11, 15 или 19, а четвертый — если 4, 8, 12, 16 или 20 (рис.4).

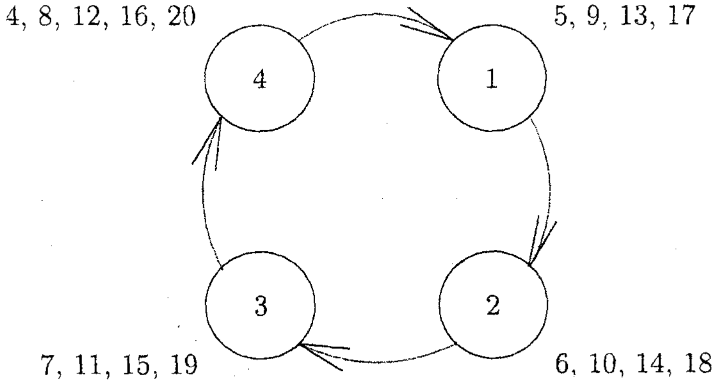

Рис.4

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих каждому из участников (табл.2):

Таблица 2

№ участника	Сумма «выброшенных» пальцев рук	Возможные комбинации	Число исходов	
1	5	$1+1+1+2$	$A_4^1=4$	
	9	$1+1+2+5$	$A_4^2=12$	
		$1+1+3+4$	$A_4^2=12$	
		$1+2+3+3$	$A_4^2=12$	
		$1+2+2+4$	$A_4^2=12$	
		$2+2+2+3$	$A_4^1=4$	
	13	$1+2+5+5$	$A_4^2=12$	
		$1+3+4+5$	$P_4=24$	
		$2+3+4+4$	$A_4^2=12$	
		$2+3+3+5$	$A_4^2=12$	
		$1+4+4+4$	$A_4^1=4$	
		$3+3+3+4$	$A_4^1=4$	
	17	$2+5+5+5$	$A_4^1=4$	
		$3+4+5+5$	$A_4^2=12$	
		$4+4+4+5$	$A_4^1=4$	156 исходов
2	6	$1+1+2+2$	$C_4^2=6$	
		$1+1+1+3$	$A_4^1=4$	
	10	$1+2+3+4$	$P_4=24$	
		$1+1+3+5$	$A_4^2=12$	
		$1+2+2+5$	$A_4^2=12$	
		$1+1+4+4$	$C_4^2=6$	
		$1+3+3+3$	$A_4^1=4$	
		$2+2+2+4$	$A_4^1=4$	
		$2+2+3+3$	$C_4^2=6$	
	14	$1+3+5+5$	$A_4^2=12$	
		$1+4+4+5$	$A_4^2=12$	
		$2+3+4+5$	$P_4=24$	
		$2+4+4+4$	$A_4^1=4$	
		$2+2+5+5$	$C_4^2=6$	
		$3+3+3+5$	$A_4^1=4$	
		$3+3+4+4$	$C_4^2=6$	
	18	$3+5+5+5$	$A_4^1=4$	
		$4+4+5+5$	$C_4^2=6$	156 исходов
3	7	$1+1+1+4$	$A_4^1=4$	
		$1+1+2+3$	$A_4^2=12$	
		$1+2+2+2$	$A_4^1=4$	
	11	$1+2+4+4$	$A_4^2=12$	
		$1+4+4+5$	$A_4^2=12$	
		$1+2+3+5$	$P_4=24$	
		$1+3+3+4$	$A_4^2=12$	
		$2+2+2+5$	$A_4^1=4$	
		$2+2+3+4$	$A_4^2=12$	
		$2+3+3+3$	$A_4^1=4$	
	15	$1+4+5+5$	$A_4^2=12$	
		$2+3+5+5$	$A_4^2=12$	
		$2+4+4+5$	$A_4^2=12$	
		$3+3+4+5$	$A_4^2=12$	
		$3+4+4+4$	$A_4^1=4$	
	19	$4+5+5+5$	$A_4^1=4$	156 исходов

Таблица 2 (продолжение)

№ участника	Сумма «выброшенных» пальцев рук	Возможные комбинации	Число исходов
4	4	$1+1+1+1$	1
	8	$1+1+1+5$	$A_4^1=4$
		$1+1+2+4$	$A_4^2=12$
		$1+1+3+3$	$C_4^2=6$
		$1+2+2+3$	$A_4^2=12$
		$2+2+2+2$	1
	12	$1+1+5+5$	$C_4^2=6$
		$1+2+4+5$	$P_4=24$
		$1+3+3+5$	$A_4^2=12$
		$1+3+4+4$	$A_4^2=12$
		$2+2+3+5$	$A_4^2=12$
		$2+2+4+4$	$C_4^2=6$
		$2+3+3+4$	$A_4^2=12$
		$3+3+3+3$	1
	16	$1+5+5+5$	$A_4^1=4$
		$2+4+5+5$	$A_4^2=12$
		$3+3+5+5$	$C_4^2=6$
		$3+5+4+4$	$A_4^2=12$
		$4+4+4+4$	1
	20	$5+5+5+5$	1

157 исходов

Вероятности, с которыми каждый из участников выйдет в первом туре игры, соответственно равны $\frac{156}{625}$, $\frac{156}{625}$, $\frac{156}{625}$ и $\frac{157}{625}$. Шансы на дежурство у оставшихся трех участников из предыдущего примера равны $\frac{1079}{3125}$, $\frac{1038}{3125}$, $\frac{1008}{3125}$ для стоящего первым, вторым и третьим соответственно. Следовательно, вероятностное дерево в этом случае имеет следующий вид (рис.5).

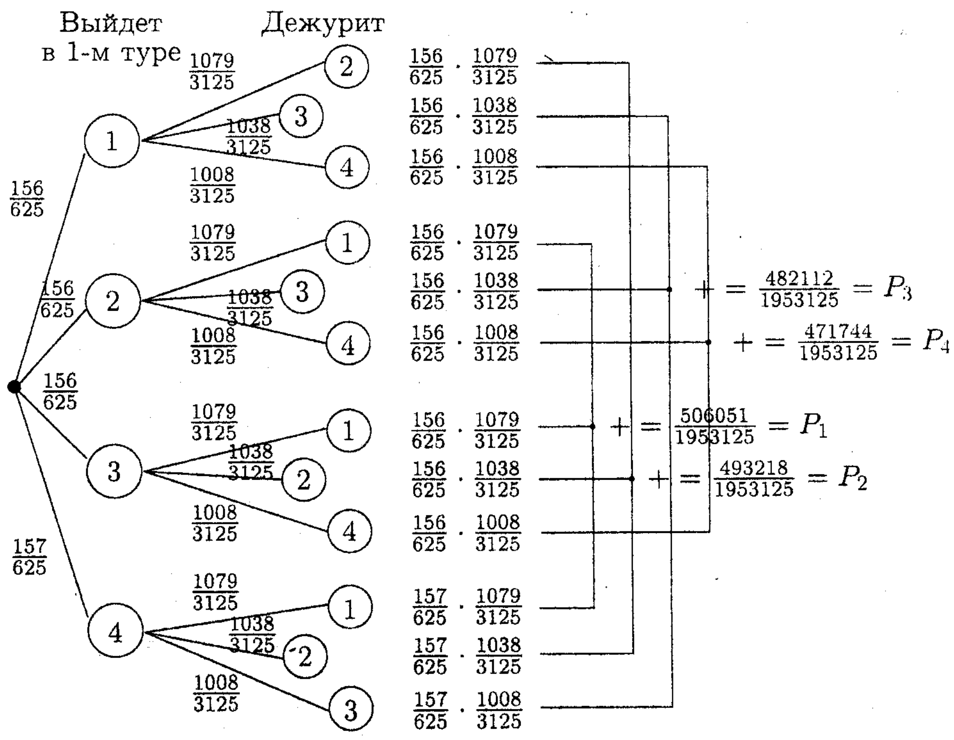

Рис.5

$P_1 > P_2 > P_3 > P_4$, следовательно, и в этом случае рекомендации участнику игры будут аналогичны предыдущим, то есть выгодней стоять четвертым, третьим или вторым по счету.

Согласно рассмотренным примерам, можно сделать предположение, что при вышеозначенных условиях стратегия игры, заключающаяся в том, что ее участнику рекомендуется стоять последним по счету, сохраняется и в случае участия в ней большего числа игроков.

§2. Игры с выбором при помощи короткой спички

В этом параграфе рассмотрим еще один вид жеребьевки, для которого сохраняется закономерность, установленная в предыдущих случаях. Заметим, что для каждого из участников испытание имеет два исхода: вытянуть или не вытянуть короткую спичку.

Пример 4. Четверо определяют дежурного по классу при помощи четырех спичек, одна из которых короче остальных. В равных ли условиях находятся играющие?

Решение: Пусть четверо вытягивают по очереди одну спичку до тех пор, пока кто-нибудь не вытянет короткую. Тот, кто вытянет короткую спичку, становится дежурным.

Вероятностное дерево исходов будет иметь вид (рис.6):

$$P_1 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}, \quad P_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \quad P_4 = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

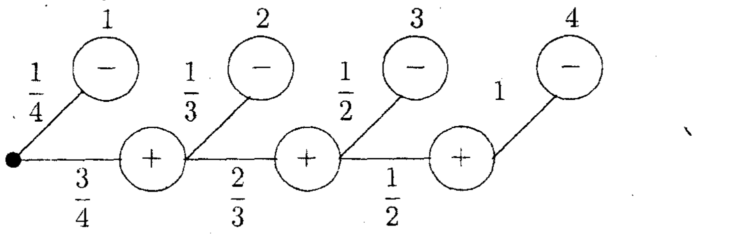

Рис.6

$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = \frac{1}{4}$ и, следовательно, в этом случае шансы у всех равные.

Пример 5. Дежурный по классу определяется среди четырех учащихся при помощи пяти спичек, одна из которых короче остальных. Определить вероятности дежурства каждого участника.

Решение: Как и в предыдущем случае, вероятностное дерево исходов имеет вид (рис.7):

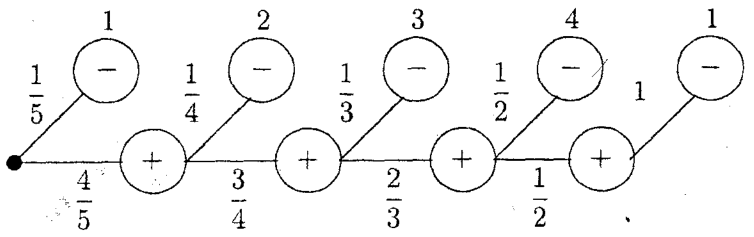

Рис.7

Используя правила сложения и умножения вероятностей, получаем, что

$$P_1 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}; \quad P_2 = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{5};$$

$$P_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5}; \quad P_4 = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

$P_1 = \frac{2}{5} > \frac{1}{5} = P_2 = P_3 = P_4$ и, следовательно, выгодней в таком случае тянуть спичку вторым, третьим или четвертым.

Пример 6. Как изменятся шансы на дежурство каждого из четырех участников, если взять шесть спичек, среди которых одна короткая?

Решение: Составим для данного случая вероятностное дерево исходов (рис.8):

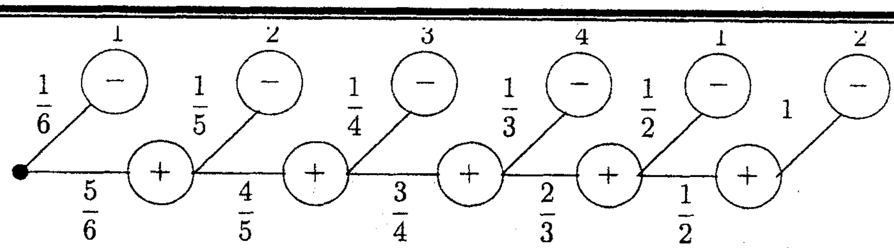

Рис.8

Следовательно,

$$P_1=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1/2\,1}{=\,6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6};\quad P_2=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6};$$

$$P_3=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6};\quad P_4=\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

$P_1=P_2=\frac{2}{6}>\frac{1}{6}=P_3=P_4$, это означает, что для данного случая выгодней тянуть спичку третьим или четвертым.

Пример 7. Определить вероятности на дежурство каждого из четырех учащихся,если количество спичек, среди которых одна короче остальных, равно семи.

Решение: Вероятностное дерево в этом случае имеет вид (рис.9):

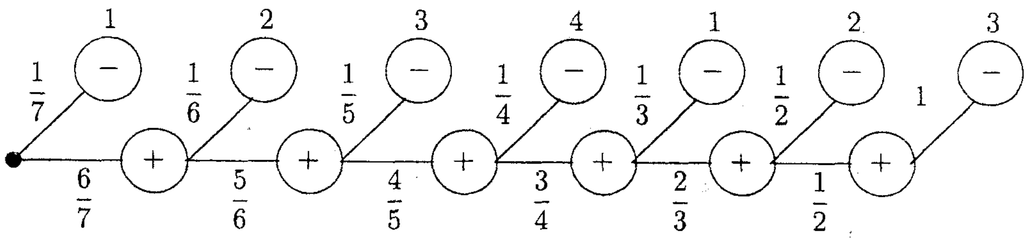

Рис.9

Откуда имеем,

$$P_1=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7};\quad P_2=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}+\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7};$$

$$P_3=\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{2}{7};\quad P_4=\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{7}.$$

$P_1=P_2=P_3=\frac{2}{7}>\frac{1}{7}=P_4$, следовательно, в этом случае выгодней тянуть спичку последним.

Итак, если спички выбирают наугад и их больше, чем участников игры, то выгодней стоять как можно ближе к последнему, а лучше всего последним.

Задачи для самостоятельного решения

1. Как изменится вывод при игре в «считалки», если «выбрасывать» любое количество пальцев одной руки (в том числе и ни одного)?

2. Решите задачу о «считалках» для двух и трех участников, «выбрасывающих» положительное число пальцев двух рук. Какая закономерность просматривается в этом случае?

3. Какой совет вы дадите трем участникам, если подсчет пальцев проводится один раз, а счет ведется по кругу?

4. Решите задачу о «считалках» для двух и трех участников, «выбрасывающих» любое количество рук (в том числе и ни одной). Прослеживается ли какая-либо закономерность в этом случае?

5. Решите задачу о «считалках» для трех участников при условии, что счет начинается с первого, а другие двое «бросают» пальцы одной руки каждый.

6. Два участника «считалки» предварительно определяют порядок счета при помощи трех спичек, а затем «выбрасывают» руки. Найдите шансы на дежурство каждого.

7. Какой совет можно дать трем участникам игры-«считалки», которые предварительно определяют порядок счета при помощи пяти спичек, среди которых одна короткая, а затем «выбрасывают» любое количество рук каждый?

8. Решите задачу о «спичках» для четырех участников, если количество спичек, среди которых две короткие равно, 5, 6, 7. Прослеживается ли какая-либо закономерность в этом случае?

9. Три участника считалки предварительно определяют порядок счета при помощи четырех спичек, из которых две короткие, а затем «выбрасывают» пальцы одной руки каждый, причем подсчет пальцев проводится один раз. Определить шансы на дежурство каждого участника.

Литература

1. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие. Ярославль, 1994. 123 с.

2. *Афанасьев В.В.* Введение в теорию вероятностей с помощью графов // Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября». 1999. № 35. С. 8–12.

3. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.