С.В. Жуленев

О ВЫПОЛНЕНИИ ОБЯЗАТЕЛЬСТВ ПРОДАВЦА АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА

Введение. Одной из успешных математических теорий в настоящее время является так называемая теория хеджирования производных ценных бумаг. С одной стороны, это ее очень хорошо характеризует, поскольку полезных практически математических теорий очень мало. Но, с другой стороны, пока авторы этой блестящей теории (одним из них является наш известный ученый А.Н.Ширяев [1]) и их последователи занимаются в основном обобщением полученных ранее результатов на все более сложные модели окружающей нас действительности. Скажем, условия существования мартингальных мер с биномиальной модели, описывающей динамику изменения цен базовой акции опциона, переносятся на случай стохастического уравнения Ито или даже немарковского процесса. Но практически отсутствуют публикации по различным нюансам этой теории, позволяющим лучше разобраться в ней не практикам (они это уже сделали), а начинающим ее изучать. Именно это обстоятельство и послужило толчком к написанию настоящей статьи, а возможно и серии статей, восполняющих этот недостаток.

В заметке на простом примере объясняется самая существенная сторона хеджирования, т.е. защиты интересов владельца ценной бумаги, ожидающей от ее продавца выполнения взятых на себя обязательств. Точнее говоря, рассмотрим американский опцион пут на акцию и покажем, что при получении так называемой справедливой цены его продавец при желании и знании теории хеджирования опционов может гарантированно выполнить взятые на себя обязательства. Более того, объясним, что же он должен сделать для этого, и затронем некоторые другие нюансы. Скажем, отметим на вопрос, каков будет выигрыш продавца, если владелец будет необоснованно рисковать, желая получить сумму, большую обещанной, и не предъявлять опцион к исполнению вовремя. Более того, специально рассмотрим более сложный американский опцион, но в ситуации примера европейского опциона из [2.с.157-159], чтобы можно было сравнить сделанные там и здесь выводы.

Модель окружающей жизни. Для решения интересующего нас вопроса, сформулированного во введении, мы будем опираться на определенную модель окружающего нас мира. При этом ясно, что нас мало будут интересовать даже постановки театра Петра Фоменко, полеты в космос или выступление Ю.М. Лужкова в Севастополе. Нам надо лишь охарактеризовать ту часть окружающего нас мира, от которой зависят цены на акции и которая позволит учитывать временную стоимость денег. Эта модель широко используется и называется $(B, S)-$рынком.

При постановке этой модели исходят из простых соображений. Считается, что хотя в мире и существует бесконечно много различных активов (много вариантов недвижимости, предметы потребления, ценные бумаги и т.д.), но есть лишь два типа, которые нас интересуют: безрисковые или рисковые ценные бумаги. При этом безрисковой мы называем ситуацию, когда в начале периода мы знаем, во что превратится одна денежная единица в его конце, а рисковой ситуацию, когда ответ на этот вопрос неопределен. И в модели как бы остается эту неопределенность лишь уточнить. Наше уточнение простейшее:

$$1 \;\Rightarrow\; e^r, \qquad 1 \;\Rightarrow\; e^\rho, \qquad \rho = \begin{cases} u, & \text{с вер. } p, \\ d, & \text{с вер. } q. \end{cases} \tag{1}$$

В нем $r > 0-$число, имеющее смысл ставки непрерывного начисления процентов за наш период, а $\rho-$случайная величина (с.в.), принимающая 2 значения, u и d, с какими-то фиксированными вероятностями.

Именно это уточнение и приводит к рассматривемой нами модели $(B, S)-$рынка. Точнее говоря, мы считаем, что в роли рискового актива выступает бездивидендная акция, а безрискового – казначейская облигация или банковский вклад. Стоимости этих двух активов, $B(t)$ и $S(t)$, будут интересовать нас лишь в дискретные моменты времени $t = n\Delta,\ 0 \le n \le N,\ \Delta = T/N$, и потому обозначим их через B_n и S_n, соответственно. Наконец, будем считать, что переход (1) связывает цены этих двух активов все N периодов $(n-1, n]\Delta$ одинаковой длины Δ. Поэтому наша модель $(B, S)-$рынка фактически задает две последовательности цен акций $S = (S_n)_{0\le n\le N}$ и облигаций $B = (B_n))_{0\le n\le N}$ следующими соотношениями при известных начальных значениях $S_0,\ B_0$:

$$B_n = B_{n-1}e^r, \quad S_n = S_{n-1}e^{\rho_n}, \qquad 1 \le n \le N, \tag{2}$$

где $(\rho_n)-$с.в., независимые и все распределенные, как ρ из (1).

Отметим также, что часть нашего рынка, описывающую изменение цены акции, называют биномиальной моделью, поскольку распределение любой с.в. S_n является биномиальным. В самом деле,

$$\rho_n = d + (u-d)\xi_n, \quad \xi_n = \begin{cases} 1, & \text{с вер. } p, \\ 0, & \text{с вер. } q. \end{cases} \tag{3}$$

$$S_n = S_0 e^{\sum_1^n \rho_l} = S_0 e^{nd+(u-d)\eta_n}, \quad \eta_n = \sum_1^n \xi_l, \text{ и если } S_{n,k} = S_0 e^{nd+(u-d)k}, \text{ то}$$

$$P(S_n = S_{n,k}) = P(\eta_n = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad 0 \le k \le n \le N; \tag{4}$$

здесь k имеет смысл числа подъемов цены за n шагов. При этом дерево возможных значений цен акции (S_{nk}) естественно считать задаваемым с помощью начальной цены S_0 и прямой индукции

$$S_{n-1,k} \ \rightarrow \begin{cases} S_{n-1,k}e^u &= S_{n,k+1}, \\ S_{n-1,k}e^d &= S_{n,k}, \end{cases} \quad n \ge 1. \tag{5}$$

Риск-нейтральный подход. Для решения поставленной задачи мы будем использовать не только $(B, S)-$рынок, но и так называемый риск-нейтральный подход. В нем мы фактически выберем из всех возможных вариантов модели $(B, S)-$рынка (2)-(5) с произвольными вероятностями подъема цены акции p и ее падения q $(0 \le p \le 1,\ p + q = 1)$ один, в котором вероятности подъема p^* и, значит, q^* будут фиксированы. В чем же он состоит?

В этом подходе считается, что инвестору (т.е. человеку, вкладывающему деньги) безразлично, во что вкладывать, в рисковый актив или безрисковый, если средняя отдача от вложений в рисковый будет совпадать с реальной отдачей от вложений в безрисковый. Иными словами, если математическое ожидание от вложений 1 единицы в рисковый актив на 1 период совпадет с буквальным приростом в безрисковом, т.е.

$$Ee^\rho \equiv pe^u + (1-p)e^d = e^r. \tag{6}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение однозначно определяет так называемую риск-нейтральную вероятность подъема цены акции на одном шаге

$$p^* = \frac{e^r - e^d}{e^u - e^d}, \tag{7}$$

если выполнено условие $d < r < u$.

Обобщая, отметим, что при оценке стоимости ЦБ европейского типа с выплатой $f(S_N)$ в конце срока жизни риск-нейтральным можно называть такой подход, в котором ее стоимость определяется из равенства

$$V = e^{-rN} Ef(S_N). \tag{8}$$

Именно эта цена и называется *справедливой ценой*. Если же оценивается стоимость ЦБ американского типа с выплатой $f(S_n)$ в какой-то один момент $t = n\Delta,\ 0 < n \leq N$, в течение срока жизни, то в риск-нейтральном подходе ее *справедливая цена* определяется равенством

$$V = \sup_{\tau \in W_0^N} E\{e^{-r\tau} f(S_\tau)\}, \tag{9}$$

в котором марковский момент τ берется из семейства W_0^N всех таких моментов, принимающих целочисленные значения $0, 1, \cdots, N$.

Основные элементы хеджирования опционов. Английское слово hedge (хедж) по-русски означает забор или защиту. Поэтому слова теория хеджирования могут переводиться как руководство по защите владельца опциона от рисков, связанных с его покупкой. Мы же покажем здесь, что продавец американского опциона пут может гарантированно выполнить свои обязательства перед владельцем, то есть независимо от событий на рынке или, другими словами, от траектории цены акции.

Оказывается, что для этого ему надо уметь не так уж и много. Во-первых, требуется строить помимо дерева возможных значений цен акции еще два дерева стоимости опционов пут: европейского и американского. Ну и, во-вторых, нужно уметь превращать каждую стоимость в этих деревьях в эквивалентный портфель из двух или трех финансовых инструментов. Точнее говоря, сначала нужно правильно представить в виде такого портфеля справедливую цену обеих опционов, а затем правильно перестраивать его на каждом последующем шагу в соответствии с тем, куда ведет реализуемая траектория цены акции.

Начнем с дерева стоимости $\{P_{nk}\}_{0 \leq k \leq n \leq N}$ европейского опциона пут, которое представляет возможные значения последовательности с.в. P_n, $0 \leq n \leq N$, т.е. описывает динамику стоимости европейского опциона пут в той же биномиальной модели. В риск-нейтральном подходе оно определяется по выплатам опциона пут $P_{N,k}$ с помощью соотношения:

$$P_{n-1,k} = e^{-r}(p^* P_{n,k+1} + (1 - p^*) P_{n,k}),\ n \leq N;\ P_{N,k} = (K - S_{N,k})^+. \tag{10}$$

При этом нетрудно понять, что так определенная стоимость $P = P_{00}$ совпадет с ценой V из (8), если там положить $f(y) = (K - y)^+$:

$$P \equiv V = e^{-rN} \sum_{n=0}^{N} C_N^n p^n q^{N-n} (K - S_{N,n})^+, \quad p = p^*. \tag{11}$$

Укажем далее, как любую стоимость опциона $P_{n,k}$ следует разбить на две части, причем одну из них вложить в акции, а другую - в некоторый резервный фонд. Для цены $P_{n-1,k}$ искомое разбиение получается из следующего представления

$$P_{n-1,k} = hS_{n-1,k} + gB_{n-1} \ \leftarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} hS_{n,k+1} + gB_n & = & P_{n,k+1}, \\ hS_{n,k} + gB_n & = & P_{n,k}, \end{array} \right. \tag{12}$$

Смысл его весьма прост. Сначала предполагаем, что разбиение дает левое равенство в (12), в котором величина h указывает, сколько денег следует вложить в акции, а величина

g – сколько оставить в резервном фонде. Сами же величины h, g, определяем из системы справа в (12), которая однозначно вытекает из левого равенства, поскольку мы знаем стоимости опциона во всех узлах. Нетрудно видеть, что они равны:

$$h_{n-1,k} = \frac{P_{n,k+1} - P_{n,k}}{S_{n-1,k}(e^u - e^d)}, \quad g_{n-1,k} = \frac{e^u P_{n,k} - e^d P_{n,k+1}}{e^u - e^d}. \tag{13}$$

Хеджирование американского опциона пут. Выше мы фактически объяснили, почему продавец европейского опциона пут может гарантированно выполнить свои обязательства перед владельцем, если получит справедливую цену. В самом деле, во-первых, справедливая цена из (8) совпадает с корнем $P = P_{00}$ дерева стоимости опциона пут $\{P_{nk}\}$. Во-вторых, получив эту цену, продавец может преобразовать эти деньги в такой портфель, стоимость которого совпадет со стоимостью опциона в конце первого периода независимо от того, поднимется цена акции или опустится. И, очевидно, то же самое можно проделывать в любом периоде, как показывает обратная индукция (10), так что, преобразуя портфель, продавец может довести его стоимость до заключительных значений P_{Nk}, а, значит, и выполнить свои обязательства.

Продавцу американского опциона также нужно уметь вести, причем те же самые преобразования. Однако прежде ему нужно разобраться, в каких узлах (n, k) стоимость американского опциона $D_{n,k}$ совпадает, а каких узлах больше стоимости $P_{n,k}$ европейского опциона, и в этих узлах научиться вкладывать разницу в некоторый вспомогательный финансовый инструмент. Поэтому сначала нужно определить третье дерево – стоимости американского опциона пут $(D_{n,k})$, $0 \leq k \leq n \leq N$, т.е. возможных значений его стоимости D_n в момент n.

В соответствии с теорией оптимальной остановки (см. [1. с. 661] или [3. с. 67-71]) это дерево определяется по тем же значениям

$$D_{N,k} = (K - S_{N,k})^+, \quad 0 \leq k \leq N,$$

следующей обратной индукцией или рекуррентными соотношениями

$$D_{n,k} = \max\{(K - S_{n,k})^+,\ e^{-r}(p^* D_{n+1,k+1} + (1 - p^*) D_{n+1,k})\}, \quad n < N. \tag{14}$$

Именно это дерево и дает решение задачи (9), то есть справедливую цену американского опциона $V = D_{0,0}$ и момента оптимальной остановки

$$\tau^* = \min\{0 \leq n \leq N :\ (K - S_n)^+ = D_n\}, \tag{15}$$

при котором достигается эта цена и который теория предлагает выбирать владельцу для предъявления опциона к исполнению.

Конкретный пример (B, S)–рынка. А теперь покажем, что

в риск-нейтральном случае продавец американского опциона пут, получивший справедливую цену, может гарантированно выполнить все свои обязательства перед его владельцем,

то есть сможет для любого узла (n, k) выплатить сумму $(D_{n,k})$, $n \leq 3$, если траектория движения цены приведет в этот узел. Рассмотрим для этого (B, S)–рынок, а в нем биномиальную модель для цен акций и риск-нейтральный подход с параметрами:

$N=3,\ S_0=160,\ K=130,\ e^u=1.5,\ e^d=0.5,\ e^r=1.2,\ \Rightarrow\ p^*=0.7$. Сразу приведем соответствующее биномиальное дерево стоимости американского опциона пут, а точнее три различных дерева (см. рис. 1). Слева дерево стоимости акций $\{S_{n,k}\}$, а справа деревья стоимости американского $\{D_{n,k}\}$ и европейского $\{P_{n,k}\}$ опционов, совпадающие всюду, за исключением трех нижних узлов $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, где стоимости европута указаны снизу.

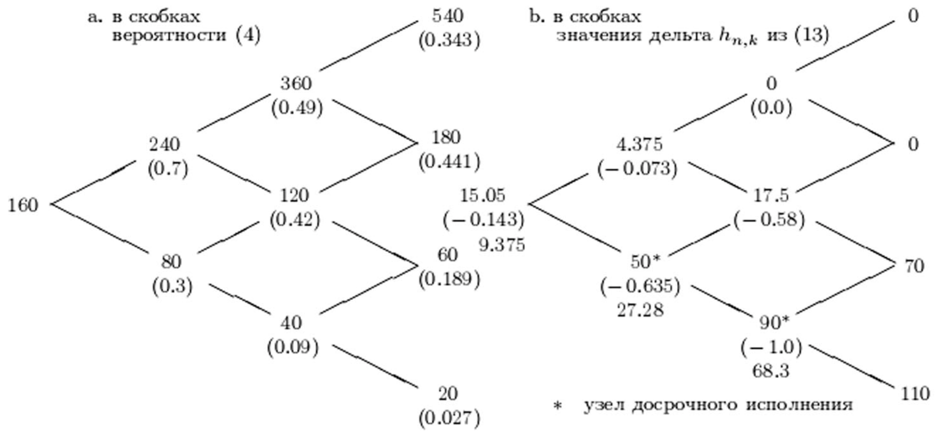

Рис. 1 *Представлены три биномиальных процесса изменения*
a. цены акции и b. стоимости американского и европейского опционов пут

Сначала стоимость американского опциона пут $D=D_{0,0}$ разобьем на две части, $D=P+Q$, причем стоимость европута, в силу (11) равная

$$P=(70\cdot 0.189+110\cdot 0.027)/(1.2)^3\cong 16.2/1.728\cong 9.375,$$

будет отвечать за полное выполнение обязательств перед владельцем во всех узлах, кроме узлов досрочного исполнения, и частичное выполнение в этих узлах. Вторая же сумма $Q=5.675$ служит добавкой, позволяющей исполнить взятые обязательства полностью и в досрочных узлах.

Итак, пусть цена $D=15.05$ продавцом получена. Тогда ему прежде всего надо собрать портфель, равный по стоимости сумме P в соответствии с левым равенством в (12) и величинами из (13), а затем менять его содержание, следуя указанным на рис. 1 в скобках значениям дельта $(h_{n,k})$ и состоянию резервного фонда, т.е. величинам $G_{n,k}=g_{n,k}B_n$:

$$G_{2,1}=87.5,\ G_{2,0}=108.3,\ G_{1,1}=21.87,\ G_{1,0}=78.08,\ G_{0,0}=32.26.$$

Но еще ему придется купить экзотический финансовый инструмент с выплатой в конце первого периода, равной $\nu_1=22.72(1-\xi_1)$ за сумму $Q=e^{-r}E\nu_1=22.72\cdot 0.3/1.2=5.675$; бернуллиевская величина ξ_1 принимает значения 0, 1, причем $P(\xi_1=1)=p^*=0.7$.

Замечание 1. Так определенный инструмент имеет простой смысл: выплата по нему связана с движением цены акции, т.е. при ее подъеме она будет равна 0, а при падении – 22.72. Кроме того, в нашей заметке рассматривается идеальный рынок, который не мешает проводить любые сделки, и в частности, покупать какие угодно финансовые инструменты.

Подберем структуру начального портфеля, исходя из равенства $h_{0,0}S_{0,0} + G_{0,0} = P \Leftrightarrow 9.375 = -0.143 \cdot 160 + 32.26$. Иными словами, берем в долг 0.143 акции, продаем за сумму $22.88 = 0.143 \cdot 160$, и она вместе с премией P составит фонд $G_{0,0} = 32.26$. А далее для иллюстрации вышесказанного рассмотрим 4 траектории движения цены из восьми.

- *Шаг 1.* Сначала рассмотрим 2 траектории без узлов досрочного исполнения: $(0,0) \to (1,1) \to (2,1) \to (3,2)$ или $(3,1)$. В этом случае портфель момента 1 имеет вид $-0.073 \cdot 240 + 21.91$. Поэтому нужно купить 0.07 акции за $240 \cdot 0.07 = 16.8$, чтобы уменьшить долг в акциях за счет уменьшения резервного фонда до величины $32.26 \cdot 1.2 - 16.8 = 21.91$. Следующий портфель $-0.58 \cdot 120 + 87.5 = 17.5$ заставляет продавца взять в долг еще акции, затем, продав их за сумму $120 \cdot 0.507 = 60.84$ и добавив сумму $21.94 \cdot 1.2 = 26.33$, получить 87.5. Наконец, если цена поднимется, то потребуется лишь отдать долг в акциях, что увеличенный фонд и позволит сделать: $87.5 \cdot 1.2 \cong 0.58 \cdot 180 \cong 104.6$. Если же цена упадет, то выполнение обязательств объяснит равенство $87.5 \cdot 1.2 \cong 0.58 \cdot 60 + 70 \cong 104.6$. Добавим: выше мы учли, что выплата по требованию $\nu_1 = 0$.

- *Шаг 2.* Далее рассмотрим 2 траектории, проходящие через узлы досрочного исполнения: $(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (3,1)$ или $(3,0)$. В узле $(1,0)$, если владелец решит предъявить требование к исполнению, перестраивать портфель продавцу не нужно. Требуется лишь отдать долг в 0.143 акции и выплатить сумму 50. Для этого достаточно использовать имеющийся фонд и купленное требование, по которому на этот раз полагается выплата $\nu_1 = 22.72$. А возможно это в силу равенства $32.26 \cdot 1.2 = 0.143 \cdot 80 + 27.28$.

Предположим теперь, что владелец опциона не обязан предъявлять опцион к исполнению в первый встретившийся ему момент досрочного исполнения. Ясно же, что в жизни он может просто забыть это сделать или рискнуть продолжить поиск момента предъявления с целью увеличить конкретный (а не средний) выигрыш, несмотря на возможные потери ... и т.д. Убедимся теперь в том, что в нашем примере и в этом случае продавец будет в состоянии выполнить свои обязательства.

- *Шаг 2* (Продолжение). Итак, владелец не предъявил опцион к исполнению в момент 1 (т.е. в узле $(1,\ 0)$). Тогда продавец должен будет в этот момент предпринять два действия. Во-первых, перестроить структуру портфеля-копии в соответствии с равенством $-0.635 \cdot 80 + 78.08 = 27.28$, и, во-вторых, купить однопериодный финансовый инструмент с выплатой $\nu_2 = 21.7(1 - \xi_2)$ (здесь, как и ранее $P(\xi_2 = 1) = 0.7$) по цене $0.3 \cdot 21.7/1.2 = 5.43$ за счет неиспользованной выплаты 22.72, после чего у продавца окажется лишняя сумма 17.29. Для изменения же структуры портфеля придется взять в долг еще 0.492 акции, продать их за $0.492 \cdot 80 \cong 39.36$ и увеличить фонд до размера $32.26 \cdot 1.2 + 39.36 = 78.08$.

  Предположим далее, что опцион предъявят к исполнению в узле $(2,\ 0)$. Тогда нетрудно понять, что продавец не только сможет выплатить сумму 90, причем за счет портфеля 68.3, а за счет выплаты по инструменту недостающую часть 21.7, но и вернуть долг по акции в силу равенства $0.635 \cdot 40 + 68.3 = 78.08 \cdot 1.2 = 93.7$. Если же в узле $(2,\ 0)$ владелец не воспользуется своим правом, скажем, надеясь получить на следующем шаге большую выплату 110, то у продавца в качестве лишней окажется сумма 38.99=21.7+17.29 независимо от цены акции в конце. В самом деле,