ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Д.Ю. Кузнецов, Т.Л.Трошина

ПОЛНЫЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗУЮЩИХ ОДНОРОДНЫХ ИДЕАЛОВ

Статья посвящена вопросам полноты систем образующих однородных идеалов кольца однородных многочленов, которые, в свою очередь, связаны с понятием насыщенности идеала. В работе доказан ряд утверждений о насыщенности идеала I = (f1, f2, f3) и получены арифметические соотношения, являющиеся необходимыми (а при определенных условиях и достаточными) условиями полноты такой системы образующих.

Рассмотрим однородный идеал $I \subset S$, где $S = k[x0, x1, \ldots, xn]$ – однородное координатное кольцо над алгебраически замкнутым полем k проективного пространства Pn = Proj S, и $n \geq 3$. Рассмотрим какую-либо систему образующих этого идеала (f1, …,fm) и обозначим через Y схему общих нулей этих образующих, так что $Y= F1\cap F2\cap \ldots\cap Fm$, где Fi – гиперповерхность, определяемая многочленом fi. Система образующих (f1, …,fm) называется полной, если любой однородный многочлен f, обращающийся в ноль на Y, выражается через многочлены этой системы. Отметим, что согласно теореме Гильберта о нулях в аффинном случае вопрос полноты решается автоматически. В то же время для однородных идеалов кольца S вопрос полноты в общем случае является далеко не простым и связан с понятием насыщенности идеала. Насыщение идеала I определяется как идеал $J:=\{f\in S \,/\, \forall\, i\ \exists\, k$ такое, что $xikf \in I\}$, и идеал I называется насыщенным, если I = J. Каждый однородный идеал I определяет подсхему Y в Pn как образ замкнутого вложения Proj $S/I \to$ Proj S, индуцированного каноническим эпиморфизмом S —> S/I, причем любая замкнутая подсхема в Pn определяется некоторым однородным идеалом. При этом два различных однородных идеала определяют одну и ту же подсхему, если они обладают одинаковым насыщением, так что существует взаимно-однозначное соответствие между замкнутыми подсхемами Y в Pn и насыщенными однородными идеалами $J\subset S$. В частности, насыщенным является идеал $\Gamma^*(I) :=\oplus H0$ (Pn, I(k)), так как он содержит все однородные многочлены f, обращающиеся в ноль на Y, и является наибольшим идеалом, определяющим Y. Но в общей ситуации невозможно определить его минимальную полную конечную систему образующих f1,…,fm. Настоящая работа посвящена решению вопроса, когда однородный идеал I с тремя образующими является насыщенным, то есть соответствующая система образующих является полной. Отметим, что каждую схему локально полного пересечения (л.п.п.) в Pn можно задать n+1 уравнением [2. Раздел 9.1.3], так что 0-мерная схема л.п.п. в P2 имеет порождающий ее идеал с тремя образующими. Условия, при которых произвольная подсхема Коэна-Маколея коразмерности 2 в Pn имеет идеал с тремя образующими, обсуждались в [1. § 2].

Основная конструкция. Пусть I = (f1,…,fm), deg fi = ni, Y – схема, определяемая I. Умножение на fi определяет морфизм α: ⊕OP(–ni) —> OP и точную последовательность

$$0 \to F \to \oplus OP(-ni) \longrightarrow IY \to 0, \qquad (1)$$

где $IY = \mathrm{im}\,\alpha$, $F = \ker \alpha$. Из [3. Prop. 1.11] следует, что пучок F рефлексивен, то есть F=Fvv .

Утверждение 1. Идеал I насыщен тогда и только тогда, когда h1(Pn, F(j))=0 для любого целого j.

Доказательство. Рассмотрим точные последовательности когомологий, соответствующих последовательности (1), подкрученной на произвольное число j. Рассматривая прямые суммы соответствующих модулей для всех натуральных чисел j и индуцированные отображения, определенные отображениями на прямых слагаемых, мы получаем точную последовательность градуированных S-модулей

$$I =(f1,\ldots,fm) \to \oplus H0\ (Pn, I(j))$$
$$\to \oplus H1\ (Pn, F(j)) \to 0. \qquad (2)$$

Тогда I насыщен тогда и только тогда, когда I =⊕H0 (Pn, I(j)), что согласно (2) эквивалентно условию h1(Pn, F(j))=0 ∀j, что и требовалось доказать.

Пусть теперь I =(f1, f2, f3), идеал с тремя образующими, так что rkF = 2. Рассмотрим следующие возможные случаи.

Утверждение 2. Пусть последовательность f1, f2, f3 регулярна, то есть Y – полное пересечение коразмерности 3 в Pn (n≥3). Тогда идеал I =(f1, f2, f3) насыщен.

Доказательство. Рассмотрим последовательность, двойственную к (1):

$$0 \to OP \to \oplus OP(ni) \longrightarrow F(c1) \to 0.$$

Перейдем к соответствующей точной последовательности когомологий. Она позволяет вычислить первые когомологии пучка F. В итоге мы получим h1(Pn, F(j))=0 ∀j, и, следовательно, в этом случае идеал I насыщен.

Проанализируем второй возможный случай, когда Codim (Y, Pn) = 2. Рассматривая последовательности, двойственные к (1) и к последовательности

$$0 \to IY \to O \to OY \to 0,$$

и пользуясь Ext-критерием рефлексивности пучка F [3. Prop. 2.13], мы получим следующее

Утверждение 3. Пусть I =(f1, f2, f3) – идеал, порождающий схему Y, и codim (Y, Pn) = 2. Тогда Y является схемой Коэна-Маколея (К. М.) тогда и только тогда, когда пучок F, определенный последовательностью (1), локально свободен.

Из критерия Хоррокса расщепимости векторных расслоений в этом случае следует

Утверждение 4. Идеал I =(f1, f2, f3), порождающий схему Коэна-Маколея Y коразмерности 2 в Pn, является насыщенным тогда и только тогда, когда соответствующее расслоение F в (1) расщепимо.

Таким образом, насыщенный идеал I =(f1, f2, f3) определяет точную последовательность

$$\begin{gathered} 0 \to OP(-a)\oplus OP(-b) \to \\ \oplus OP(-n1)\oplus OP(-n2)\oplus OP(-n3) \\ \longrightarrow IY \to 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где IY – опучкованный идеал I, Y – соответствующая схема нулей.

Рассмотрим теперь случай, когда P – проективная плоскость, Y – нульмерная подсхема P, I – ее идеал. Если Y приведена (или, более общим образом, является локально-полным пересечением) и не полное пересечение, то ее идеал порождается тремя образующими, так что Y есть схемное пересечение трех кривых, и I =(f1, f2, f3). Обозначим ni = deg(fi), n1≤ n2≤ n3. Пусть d = length(Y). Тогда если I насыщен, то вычисление классов Черна пучков в последовательности (3) дает равенства n1 + n2 + n3 = a+b и d = n1n2 + n3n1 + n2 n3 – ab = n1(n2 –a)+ n3(n1–a) + n2 (n3 – a) + a2 , где a,b > ni для каждого i. Таким образом, мы получаем чисто арифметические необходимые и достаточные условия полноты системы образующих (f1, f2, f3). При этом числа n1 и n2 однозначно определены следующими условиями: n1 – минимальная степень кривой, содержащей Y, n2 – минимальное число r, такое что h0(IY (r) > h0(OP(r–n1)). Эти соотношения позволяют для конкретной системы из трех образующих нульмерной схемы Y степени d на проективной плоскости определить, является ли она полной. В качестве иллюстрации данного метода можно предложить следующие задачи:

Даны d точек в общем положении. При каких значениях d их идеал имеет полную систему трёх образующих?

Рассмотрим множество точек трансверсального пересечения двух кривых на плоскости и удалим из этого множества одну точку. Будет ли полученное множество иметь определяющий идеал с полной системой трёх образующих?

Библиографический список

1. Кузнецов, Д.Ю. Схемные пересечения трех гиперповерхностей в Pn и ассоциированные пучки [Текст] / Д.Ю. Кузнецов // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – №8. – С. 105–118.
2. Фултон, У. Теория пересечений [Текст]: монография / У. Фултон. – М.: Мир, 1989. – 583 с.
3. Hartshorne R. Stable reflective sheaves. // Math Ann. – 1981.