А.В. Лебедев

ТЯЖЕЛЫЕ ХВОСТЫ И КЛАСТЕРЫ ПРЕВЫШЕНИЙ В РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ С ЛОГ-ЛАПЛАСОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Введение. Рассмотрим процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому рекуррентному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \tag{1}$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Такие процессы и поведение экстремумов в них изучались автором в [1, 2] для случаев, когда коэффициенты A_n принимают значения в интервале $(0, 1)$. Однако в предположении, что они могут принимать значения, как меньшие, так и большие единицы, ситуация оказывается качественно иной. Такие модели давно известны; они исследовались, например, в [3].

Далее мы рассмотрим случай, когда коэффициенты A_n имеют лог-лапласовское распределение [4] вида:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta} x^{\alpha}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta} x^{-\beta}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad 0 < \alpha < \beta. \tag{2}$$

Известно, что у процесса вида (1) при довольно общих условиях стационарное распределение имеет степенной хвост (показатель которого обозначим κ) и превышения высокого уровня происходят не по одиночке, а образуют кластеры случайного размера. Вероятность появления кластера размера k обозначим через π_k, $k \geq 1$. Величина, обратная среднему размеру кластера, называется экстремальным индексом θ. Если экстремальный индекс стационарной случайной последовательности $\theta > 0$, то ее максимум M_n растет асимптотически как максимум θn независимых случайных величин с тем же распределением [3],[5, §8.1]. В работе [3] для этих величин приведены общие формулы, но ни в общем случае, ни в рассмотренном там частном (применительно к ARCH-процессам) они не дают ответа в явном виде, и результат может быть получен только приближенно (методом Монте-Карло). В лог-лапласовском случае оказывается возможным получить все характеристики в явном виде, и это единственный известный автору пример такого рода. Заметим, что распределение величин B_n и их возможная зависимость от A_n не играют роли при довольно общих условиях (теорема A), которые в дальнейшем мы будем считать заведомо выполненным.

Исследования данной модели проводились под научным руководством автора его учениками в 2005–2006 гг., однако затем, к сожалению, были прекращены. Их результаты отражены в [6], где найдены показатели $\kappa = \beta - \alpha$ (теорема 3) и $\theta = (1 - \alpha/\beta)^2$ (теорема 4). Там же обсуждались возможные приложения модели в финансовой математике и эконометрике.

В общем случае (1) может описывать динамику некоторой системы, подверженной случайным возмущениям. Если бы коэффициенты A_n были постоянны и равны A, то система была бы устойчивой при $0 < A < 1$ и неустойчивой при $A \geq 1$. Однако в нашем случае система "осциллирует"между этими двумя состояниями, проходя через периоды устойчивости и неустойчивости случайным образом.

[1]Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ № 07-01-00077, № 07-01-00373.

Отметим также, что вопрос о структуре кластеров достаточно просто решается для ARMA-процессов с тяжелыми хвостами [5, §5.5]. Однако для более сложных процессов аналитические результаты единичны. Например, в [7] изучались экстремумы и кластеры превышений обобщенных процессов максимум-авторегрессии первого порядка. Размеры кластеров в этом случае оказываются распределены геометрически.

Все наши рассуждения основаны на следующих теоремах.

Теорема А [3]. *Рассмотрим уравнение* (1), *и пусть существует такое* $\kappa > 0$, *что*

$$\mathbf{E}A_1^\kappa = 1, \quad \mathbf{E}A_1^\kappa \ln^+ A_1 < \infty, \quad 0 < \mathbf{E}B_1^\kappa < \infty \tag{3}$$

и распределение $B_1/(1-A_1)$ *не вырождено, а распределение* $\ln A_1$ *при условии, что* $A_1 \neq 0$, *не решетчатое. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Уравнение* $Y_\infty \stackrel{d}{=} A_1 Y_\infty + B_1$, *где* Y_∞, (A_1, B_1) *независимы, имеет единственное решение*

$$Y_\infty \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} B_j \prod_{i=1}^{j-1} A_i.$$

2. *Если в* (1) *мы возьмем* $Y_0 \stackrel{d}{=} Y_\infty$, *то процесс* $\{Y_n\}$ *стационарный.*

3. *Независимо от начального условия процесса* $\{Y_n\}$ $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$ *при* $n \to \infty$.

4. *Существует константа* $c > 0$, *такая, что*

$$\mathrm{P}(Y_\infty > x) \sim c x^{-\kappa} \text{ при } x \to \infty$$

Теорема Б [3]. *Если справедливы условия теоремы* A, *то процесс* Y_n *имеет экстремальный индекс* θ, *вычисляемый по формуле:*

$$\theta = \int_1^\infty \mathrm{P}\left(\bigvee_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} A_i \le y^{-1}\right) \kappa y^{-\kappa-1}\, dy, \tag{4}$$

и при $a_n = n^{-1/\kappa}$, *для всех* $x > 0$ *имеем:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(a_n M_n \le x) = \exp(-c\theta x^{-\kappa}).$$

Далее, пусть N_n — *нормализованный по времени точечный процесс превышений уровня* $u_n = x/a_n = x n^{-1/\kappa}$, $x > 0$, *и* N — *сложный пуассоновский процесс с интенсивностью* $c\theta x^{-\kappa}$ *и распределением кратности точек, заданный вероятностями* $\pi_k = (\theta_k - \theta_{k+1})/\theta$, $k \ge 1$, *где*

$$\theta_k = \int_1^\infty \mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}\left\{\prod_{i=1}^{j} A_i \le y^{-1}\right\} = k-1\right) \kappa y^{-\kappa-1}\, dy,$$

в частности, $\theta_1 = \theta$. *Тогда* $N_n \xrightarrow{d} N$, $n \to \infty$.

2. Основные результаты. С помощью теоремы А в [6] было показано, что если A_n распределены по закону (2), то $\kappa = \beta - \alpha$.

Согласно [3], допустимо представление

$$\theta = 1 - \mathrm{M}e^{\kappa \min\{T_1, 0\}}, \quad \theta_k = \mathrm{M}e^{\kappa \min\{T_{k-1}, 0\}} - \mathrm{M}e^{\kappa \min\{T_k, 0\}}, \tag{5}$$

где через T_k, $k \ge 1$, обозначены k максимумы (т.е. первое, второе, третье наибольшое по величине значение и т.д.) в последовательности сумм $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $Z_i = \ln A_i$. Величины

Z_i имеют асимметричное лапласовское распределение

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{\alpha x}, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-\beta x}, & x \ge 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Поскольку при $\alpha < \beta$ верно $\mathrm{M}Z_1 < 0$, то $S_n \to -\infty$, $n \to \infty$, почти наверное, и все T_k определены. Таким образом, задача сводится к изучению их распределений.

Лемма 1. *Все T_k, $k \ge 1$, имеют распределения*

$$G_k(x) = \begin{cases} (1-h_k)\, e^{\alpha_k x}, & x < 0 \\ 1 - h_k\, e^{-(\beta-\alpha)x}, & x \ge 0 \end{cases}, \tag{7}$$

где $\alpha_k = (\beta-\alpha)h_k/(1-h_k)$ и h_k, $k \ge 1$, удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$h_k = \rho\left(1 - \frac{(1-h_{k-1})^2}{1-\rho h_{k-1}}\right), \quad h_0 = 1; \quad \rho = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{8}$$

Доказательство. Событие $\{T_k \le x\}$ означает, что последовательность S_n превышает уровень x менее k раз. Тогда если $Z_1 = u$, то при $u \le x$ сумма $S_n^{(2)} = \sum_{j=2}^{n+1} Z_j$ превышает уровень $x-u$ менее k раз, а при $u > x$ менее $k-1$ раз, причем последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_n^{(2)}\}$ представляют собой вероятностные копии. Таким образом, получаем уравнение

$$G_k(x) = \int_{-\infty}^{x} G_k(x-u)\,dG(u) + \int_{x}^{+\infty} G_{k-1}(x-u)\,dG(u). \tag{9}$$

При $k=1$ последнее слагаемое отсутствует, что может быть описано формальным введением $G_0(x)$ вида (7) с $h_0 = 1$, поскольку тогда $G_0(x) \equiv 0$ при $x < 0$.

Полагая, что G_{k-1} имеет нужный нам вид (с некоторым h_{k-1}), будем искать решение G_k в виде (7). Поскольку функции распределения описываются различными выражениями при положительных и отрицательных x, будем обозначать это соответствующими индексами. Из (9) получается два уравнения:

$$G_k^+(x) = \int_{-\infty}^{x} G_k^+(x-u)\,dG(u) + \int_{x}^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u)\,dG^+(u), \quad x \ge 0; \tag{10}$$

$$G_k^-(x) = \int_{-\infty}^{x} G_k^+(x-u)\,dG(u) + \int_{x}^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u)\,dG(u), \quad x < 0. \tag{11}$$

Таким образом, достаточно решить уравнение (10), а G_k^- восстанавливается по G_k^+ с помощью (11).

Вычисляя правую часть (10), получаем:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{0} G_k^+(x-u)\,dG^-(u) + \int_{0}^{x} G_k^+(x-u)\,dG^+(u) + \\ &\quad + \int_{x}^{+\infty} G_{k-1}^-(x-u)\,dG^+(u) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(\int_{-\infty}^{0} (1 - h_k e^{-(\beta-\alpha)(x-u)})e^{\alpha u}\,du + \int_{0}^{x} (1 - h_k e^{-(\beta-\alpha)(x-u)})e^{-\beta u}\,du + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x}^{+\infty} (1-h_{k-1})e^{\alpha_{k-1}(x-u)}e^{-\beta u}\,du\right) = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{h_k}{\beta}e^{-(\beta-\alpha)x} + \frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta x}) - \frac{h_k}{\alpha}e^{-(\beta-\alpha)x}(1-e^{-\alpha x}) + \right. \\ &\quad \left. + (1-h_{k-1})e^{\alpha_{k-1}x}\cdot\frac{e^{-(\alpha_{k-1}+\beta)x}}{\alpha_{k-1}+\beta}\right) = \\ &= 1 - h_k e^{-(\beta-\alpha)x} + \left(\frac{h_k}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{(1-h_{k-1})^2}{\beta - \alpha h_{k-1}}\right) e^{-\beta x}. \end{aligned}$$