Библиографический список

1. Donaldson S.K., Kronheimer P.B. The geometry of four-manifolds. Oxford Univ. Press, 1990.
2. Feehan P.M.N. Geometry of the ends of the moduli space of anti-self-dual connections. J.Diff.G. 42, No.3 (1995), 465-553.
3. Kirwan F. Partial desingularisations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers. Ann of Math. 122 (1985), 41-85.
4. Maruyama M. Singularities of the curves of jumping lines of a vector bundle of rank 2 on P2.
5. Algebraic Geometry, Proc.of Japan-France Conf., Tokyo and Kyoto, 1982, Lect. Notes in Math., 1016, Springer, 1983, 370-411.
6. Maruyama M. Moduli of stable sheaves I,II J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 91-126, 18 (1978), 557-614. Mumford D., Fogarty J. Geometric Invariant Theory. 2nd edition, Springer, 1982.
7. Okonek C., Schneider M., Spindler H. Vector Bundles on Complex Projective Spaces. Birkhauser, 1980.
8. Nagaraj D., Seshadri C. Degenerations of the moduli spaces of vector bundles on curves Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 107, No. 2 (1997), 101-137, 109, No. 2 (1999), 165-201.
9. Taubes C.H. A framework for Morse theory for the Yang-Mills functional. Invent. math. 94 (1988), 327-402.
10. Шафаревич, И.Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1988.

Е.И.Смирнов

ГОМОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ХАУСДОРФОВЫХ СПЕКТРОВ

Введение

Изучение производных функтора проективного предела, действующего из категории счетных обратных спектров со значениями в категории локально выпуклых пространств, проведенное в [1–2], позволило универсальным образом решать вопросы о гомоморфности данного отображения посредством точности некоторого комплекса в абелевой категории векторных пространств. Позднее в работе [3] было введено широкое обобщение понятий прямого и обратного спектров объектов аддитивной полуабелевой категории $\mathcal{G}$ – понятие хаусдорфова спектра, аналогичное δs – операции в дескриптивной теории множеств. Эта идея характерна еще для алгебраической топологии, общей алгебры, теории категорий, теории обобщенных функций. Построение хаусдорфовых спектров $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ достигается последовательным стандартным расширением малой категории индексов Ω. Категория $\mathcal{H}$ хаусдорфовых спектров оказывается при подходящем определении отображения спектров аддитивной и полуабелевой. В частности, $\mathcal{H}$ содержит категорию В.П.Паламодова [1] счетных обратных спектров со значениями в категории TLC локально выпуклых пространств, H – предел хаусдорфова спектра в категории TLC обобщает понятия проективного и индивидуального пределов и определяется действием функтора $\mathrm{Haus} : \mathcal{H} \longrightarrow TLC$. Действие функтора Haus на счетные хаусдорфовы спектры над категорией банаховых пространств определяет класс H-пространств, для объектов которого справедлива теорема о замкнутом графике и который содержит категорию пространств Фреше, пространств Де Вильде [7], пространств Д.А.Райкова [5], пространств Суслина [6]. H-предел хаусдорфова спектра H-пространств является H-пространством. В настоящей работе показано, что в категории имеется много инъективных объектов и определены правые производные Haus^i $(i = 1, 2, \ldots)$, а "алгебраический"функтор $\mathrm{Haus} : \mathcal{H}(L) \longrightarrow L$ над абелевой категорией L векторных пространств (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$) имеет инъективный тип, то есть если

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z}$$

точная последовательность отображений хаусдорфовых спектров со значениями в L, то предельная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Z})$$

точна или ациклична в терминах В.П.Паламодова [2]. В частности, регулярность хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$ неотделимостей $\mathcal{Y}$ обеспечивает точность функтора Haus $: \mathcal{H}(TLC) \longrightarrow TLC$ и условие обращения в нуль $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$. Классические результаты Мальгранжа и Эренпрайса о разрешимости неоднородного уравнения $p(D)D' = D'$, где $p(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами в $\mathbf{R}^n$, $D' = D'(S)$ – пространство обобщенных функций в выпуклой области $S \subset \mathbf{R}^n$, распространяется на случай не обязательно открытых или замкнутых множеств S. Пространство основных функций на таких множествах $S \subset \mathbf{R}^n$ является H-пространством (вообще говоря, с неметризуемой топологией), то есть

$$D(S) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{s \in F} D(T_s), \tag{1}$$

где $\{\bigcap_{s\in F} T_s\}_{F\in\mathcal{F}}$ образуют фундаментальную систему бикомпактных подмножеств из S, $D(T_s)$ – пространства Фреше основных функций с носителями в замкнутых множествах $T_s \subset \mathbf{R}^n$, где $S = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} \bigcap_{s\in F} T_s$. Гомологическими методами устанавливается критерий обращения в нуль $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$ для функтора Haus хаусдорфова предела, ассоциированного с представлением (1), где $\mathcal{X}$ – хаусдорфов спектр ядер операторов $p(D) : D'(T_s) \longrightarrow D'(T_s)$ $(s \in |\mathcal{F}|)$. Условие $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$ эквивалентно эпиморфизму оператора $p(D) : D'(S) \longrightarrow D'(S)$.

Аналогичные теоремы для пространств Фреше впервые доказаны В.П.Паламодовым [1–2].

1. Напомним некоторые определения и теоремы, используемые в этой работе и введенные в рассмотрение в [3–6], [12].

Пусть $\Omega(s)$ – малая категория, s – объекты из Ω. Направленным классом в категории называется подкатегория, обладающая следующими свойствами:

i) между любыми двумя объектами определено не более одного морфизма;

ii) для любых объектов s, s' найдется объект s'' такой, что $s \longrightarrow s''$ и $s' \longrightarrow s''$.

Пусть $A(s)$ – некоторая категория. Категорию $B(S)$, где S – подкатегория A, назовем стандартным расширением категории $A(s)$, если выполнены следующие условия:

1^0. $A(s)$ – полная подкатегория $B(S)$;

2^0. Морфизм $\omega_{SS'} : S' \longrightarrow S$ категории $B(S)$ определен набором морфизмов $\omega_{ss'} : s' \longrightarrow s$ $(s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s)$ категории $A(s)$ таких, что

а) для всякого $s' \in S'$ существует $s \in S$ такой, что $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$;

б) если $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$, $p' \xrightarrow{\omega_{pp'}} p$, $s \xrightarrow{S} p$, то существует морфизм $s' \xrightarrow{S'} p'$ и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
{} & s \arrow[rr, "S"] & & p \\
{} \arrow[u, "\omega_{SS'}"'] & s' \arrow[u, "\omega_{ss'}"] \arrow[rr, dashed, "S'"'] & & p' \arrow[u, "\omega_{pp'}"']
\end{tikzcd}$$

Пример 1 (стандартное расширение категории $A(s)$). Пусть G и $A(s)$ – категории, $T(F)$ – категория ковариантных функторов $F : G \longrightarrow A$ с функторным морфизмом $\Phi : F_1 \longrightarrow F_2$, определяемым правилом [2], относящим каждому объекту $g \in G$ морфизм $\Phi(g) : F_1(g) \longrightarrow F_2(g)$ категории A такое, что для любого морфизма $\omega : g \longrightarrow h$ категории G коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
F_1(h) \arrow[r, "\Phi(h)"] & F_2(h) \\
F_1(g) \arrow[u, "F_1(\omega)"] \arrow[r, "\Phi(g)"] & F_2(g) \arrow[u, "F_2(\omega)"']
\end{tikzcd}$$

Ясно, что каждый объект $s \in A$ порождает ковариантный функтор $F_s : g \in G \longmapsto s \in A$ так, что $A \subset T$. Более того, A – полная подкатегория T.

Покажем, что T порождает стандартное расширение категории A (посредством категории G). Пусть $F \in T$ и $S \subset A$ так, что $S = \bigcup\limits_{g \in G} F(g)$ и для $s', s \in S$ множество морфизмов $\mathrm{Hom}\,(s', s) = \bigcup\limits_{\omega} F(\omega)$, где $\omega : g \longrightarrow h$ и $s' = F(q),\ s = F(h)$. Поэтому определена категория $B(S)$, где S – подкатегория A, и морфизмы $\omega_{SS'} : S' \longrightarrow S$ категории $B(S)$ порождаются набором функторных морфизмов $\Phi : F' \longrightarrow F$, где $F' \in T$ порождает S', а F порождает S указанным выше способом.

Если взять такой функторный морфизм $\Phi : F' \longrightarrow F$, то морфизмы $\Phi(g) : F'(g) \longrightarrow F(g)$ категории $A(s)$ $(g \in G)$ образуют набор морфизмов $\omega_{ss'} : s' \longrightarrow s$ $(s' = F'(g),\ s = F(q))$ так, что выполнено a). Условие b) вытекает из рассмотрения определения функторного морфизма.

Таким образом, $B(S)$ – стандартное расширение категории $A(s)$. Если $G = \mathrm{Ord}\, I$, где I – линейно упорядоченное множество, то $T = B(S)$.

Пример 2 (Паламодов [1]). Категория прямых и обратных спектров над полуабелевой категорией K является стандартным расширением категории K.

Рассмотрение спектров на частично упорядоченных множествах более сложной природы (не обязательно линейно упорядоченных) требует их специальной организации индексации.

Осуществим последовательные стандартные расширения категорий

$$\Omega(s) \subset \mathcal{B}(T) \subset \sigma(F) \longrightarrow \sigma^0(F) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}), \tag{2}$$

где T – направленные классы объектов $s \in \Omega$, $T \subset \Omega$, F – базисы фильтров множеств $T \in \mathcal{B}$, $F \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{F}$ – направленные классы объектов $F \in \sigma$ дуальной категории σ^0, $\mathcal{F} \subset \sigma$, $\mathcal{F} \in \mathcal{D}$. Такие классы $\mathcal{F}$ будем называть допустимыми для Ω; положим $|F| = \bigcup\limits_{T \in F} T$, $|\mathcal{F}| = \bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} |F|$, так что $|F| \subset \Omega$ и $|\mathcal{F}| \subset \Omega$. Наиболее характерные построения, связанные с хаусдорфовыми спектрами, используют в качестве малой категории $\Omega = \mathrm{Ord}\, I$, где I – частично упорядоченное множество индексов.

Рисунок, поясняющий характер индексации, приведен ниже.

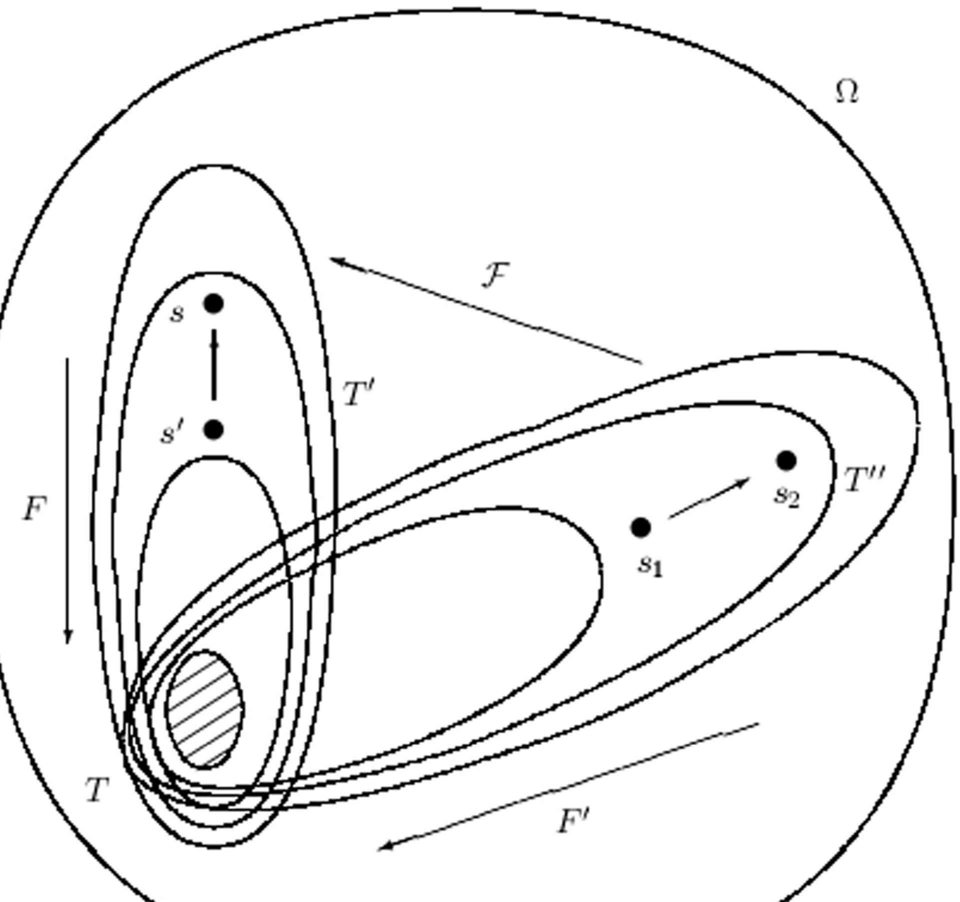

Рис. 1

Пример 3 (построение допустимого класса для Ω). Пусть T – отделимое топологическое пространство, Ω – счетное множество. Множество $A \subset T$ назовем s-множеством, если

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t,$$

где T_t $(t \in \Omega)$ – подмножества T, $\mathcal{K}$ – семейство подмножеств B множества Ω таких, что

а) для каждого $B \in \mathcal{K}$ множество $T_B = \bigcap\limits_{t \in B} T_t$ бикомпактно в T;

б) множества T_B $(B \in \mathcal{K})$ образуют фундаментальную систему подмножеств A.

В теоретико-множественном смысле s-множества есть результат δs-операции Хаусдорфа-Колмогорова с некоторыми топологическими условиями.

Предложение 1. *Всякое сепарабельное метрическое пространство является s-множеством.*

Доказательство. Пусть A – сепарабельное метрическое пространство с метрикой ρ. Рассмотрим в A совокупность всевозможных открытых шаров радиуса меньше наперед заданного $\varepsilon > 0$. Так как пространство A сепарабельное, то на этой совокупности можно выделить последовательность O_{l_1} $(l_1 = 1, 2, ...)$ открытых шаров, также покрывающую A. Образуем теперь всевозможные конечные объединения элементов O_{l_1} $(l_1 = 1, 2, ...)$. Полученное множество счетно, и его можно занумеровать индексом $n_1 = 1, 2, ...$. Пусть это будут множества A_{n_1}.

Зафиксируем произвольно номер n_1 и покроем A_{n_1} открытыми шарами радиуса меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, целиком лежащими в A_{n_1} (A_{n_1} – открытое множество). Тогда в силу сепарабельности метрического пространства A_{n_1} в индуцированной топологии найдется последовательность $O_{n_1 l_2}$ $(l_2 = 1, 2, ...)$ открытых шаров, также покрывающая A_{n_1}. Образуем всевозможные конечные объединения элементов $O_{n_1 l_2}$ $(l_2 = 1, 2, ...)$. Пусть это будут множества $A_{n_1 n_2}$.

Таким образом, по индукции получаем счетное семейство открытых множеств $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ $(n_k,\ k = 1, 2, ...)$, причем справедливы включения $A_{n_1} \supset A_{n_1 n_2} \supset ...$, и каждое множество $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ является конечным объединением открытых шаров $O_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} l_k}$ радиуса меньше $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ $(k \in \mathbf{N})$.

Пусть теперь K – бикомпактное подмножество пространства A. Легко видеть, что $K \subset A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ $(k = 1, 2, ...)$ для некоторой последовательности $(n_1, n_2, ...)$, причем без ограничения общности можно считать, что K имеет непустое пересечение с каждым из оставшихся множеств $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ открытых шаров радиуса меньше $\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}$ $(k = 1, 2, ...)$. Поэтому если $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_1 n_2 \dots n_k}$, то справедливо $\rho(x, K) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$ для всех $m = 1, 2, \dots$, следовательно, $x \in K$. Таким образом, $K = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_{n_1 n_2 \dots n_k}$.

Положим $\Omega = \{(n_1, n_2, \dots, n_k) : \ n_k, \ k = 1, 2, \dots\}$ и рассмотрим семейство K всех подмножеств $B \subset \Omega$ таких, что $\bigcap\limits_{t \in B} A_t \neq 0$ – бикомпактное подмножество в A. Ясно, что

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} A_t$$

и A является s-множеством.

Предложение 2. *Пусть A – подмножество в конечномерном пространстве $\mathbf{R}^n$. Тогда A является s-множеством и, более того,*

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t,$$

где T_t – бикомпактные подмножества $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. В самом деле, в силу предложения 1 и сепарабельности любого подмножества конечномерного пространства в индуцированной топологии множество A имеет вид

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} A_t$$

и является s-множеством. Но каждое множество A_t $(t \in \Omega)$ ограничено в $\mathbf{R}^n$, поэтому если обозначить соответствующие замыкания в $\mathbf{R}^n$ через T_t, то $\bigcap\limits_{t \in B} A_t = \bigcap\limits_{t \in B} T_t$ для каждого $B \in \mathcal{K}$ и, следовательно, имеет место равенство (2), где каждое множество T_t $(t \in \Omega)$ бикомпактно.

Таким образом, s-множества являются обобщением, с одной стороны, бикомпактных пространств (и локально бикомпактных пространств, счетных на бесконечности), а с другой стороны, сепарабельных метрических пространств. Нам, однако, s-множества будут интересны в связи с возможностью построения ассоциированного функтора простого хаусдорфова спектра на допустимом классе $\mathcal{F}$ для Ω..

Пусть A – некоторое s-множество, то есть

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}} \bigcap_{t \in B} T_t,$$

где $T_t \subset T, \ B \subset \tilde{\Omega}$. Без ограничения общности можно считать, что семейство Q подмножеств T_t $(t \in \tilde{\Omega})$ замкнуто относительно конечных пересечений и объединений (то есть существуют сюръекции $\Phi_s, \Psi_s : d(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \tilde{\Omega}$ соответственно, $d(\tilde{\Omega})$ – множество конечных подмножеств $\tilde{\Omega}$).

Множество $\tilde{\Omega}$ будет частично упорядоченным, если положить $t' \leq t$, когда $T_t \subset T_{t'}$; пусть $\mathcal{G} = \operatorname{Ord} Q$. Более того, можно считать, что каждое множество $B \in \mathcal{K}$ направлено в $(\tilde{\Omega}, \leq)$.

Пусть I – фактормножество всевозможных комплексов $s = [t_1, t_2, ..., t_n]$, где $t_i \in |\mathcal{K}|$, $t_i = pr_i s$ $(i = 1, 2, ..., n,\ n \in \mathbf{N})$ по соотношению эквивалентности во множестве упорядоченных n-ок элементов из $|\mathcal{K}| : (t_1, t_2, ..., t_n) \sim (t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ тогда и только тогда, когда $\{t_1, t_2, ..., t_n\} = \{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$. Множество I становится частично упорядоченным, если положить $s' \leq s$, где $s = [t_1, t_2, ..., t_n]$, $s' = [t'_1, t'_2, ..., t'_m]$, когда для каждого t_i найдется t'_j такой, что $t'_j \leq t_i$; пусть $\Omega = \operatorname{Ord} I$.

Продолжая далее построение согласно методу (2) трансформации индексов, построим допустимый класс $\mathcal{F}$ для Ω. Для каждого $s = [t_1, t_2, ..., t_n] \in |\mathcal{F}|$ определяется подмножество $R_s = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_{t_i}$, причем если $s' \leq s$, то $R_s \subset R_{s'}$. Тем самым определяется контравариантный функтор $H(A) : |\mathcal{F}| \longrightarrow \mathcal{G}$, причем

$$A = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \bigcap_{s \in F} R_s. \tag{3}$$

Существенным моментом является то, что I – счетное множество и семейство $\{\bigcap\limits_F R_s\}$ представляет собой фундаментальную систему непустых бикомпактных подмножеств A. Этим завершается рассмотение примера 3.

Пусть $\mathcal{G}$ – некоторая категория. Ковариантный функтор $H_{\mathcal{F}} : \Omega \longrightarrow \mathcal{G}$ назовем функтором хаусдорфова спектра, если $\Omega = |\mathcal{F}|$ для некоторого допустимого класса $\mathcal{F} \in \mathcal{D}$. Если $\mathcal{F} = |\mathcal{F}|$, то $H_{\mathcal{F}}$ есть функтор прямого спектра, а если $\mathcal{F} = \{|\mathcal{F}|\}$ (то есть $\mathcal{F}$ состоит из одного элемента $|F| = |\mathcal{F}|$), то $H_{\mathcal{F}}$ есть функтор обратного спектра.

$$h_{\mathcal{F}} \qquad \begin{cases} |\mathcal{F}| \quad \longrightarrow \quad \mathcal{G} \\ s \quad \longmapsto \quad X_s \\ (s' \ \xrightarrow{\omega_{ss'}} \ s) \ \longmapsto \ (X_s \ \rightsquigarrow \ X_{s'}) \\ (F' \ \xrightarrow{\omega_{FF'}} \ F) \ \longmapsto \ ((X_s)_{s \in |F|} \ \rightsquigarrow \ (X_{s'})_{s' \in |F'|}) \end{cases}$$

инъективен на объектах и морфизмах (в теоретико-множественном смысле), то существует направленный класс $((X_s)_{s \in |F|}, q_{FF'})_{F, F' \in \mathcal{F}}$ направленных в дуальной категории $\mathcal{G}^0$ классов $(X_s, h_{s's})_{s, s' \in |F|}$ $(F \in \mathcal{F})$, удовлетворяющих следующим условиям:

1^0. Морфизм $X_s \overset{h_{s's}}{\rightsquigarrow} X_{s'}$ выбран и зафиксирован в том и только в том случае, когда выбран морфизм $s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$, тогда $h_{s's} : X_s \rightsquigarrow X_{s'}$ – единственный морфизм;

2^0. Диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} X_s & & \overset{h_{s''s}}{\rightsquigarrow} & & X_{s''} \\ & h_{s's} \searrow & & \swarrow h_{s's''} & \\ & & X_{s'} & & \end{array}$$

коммутативна для всех $s'' \xrightarrow{\omega_{s's''}} s' \xrightarrow{\omega_{ss'}} s$;

3^0. Если $(X_s)_{s\in|F|} \overset{q_{F'F}}{\rightsquigarrow} (X_{s'})_{s'\in|F'|}$, то для всякого $X_{s'}$ $(s' \in |F'|)$ существует единственный морфизм $h_{s's} : X_s \rightsquigarrow X_{s'}$ $(s \in |F|)$. Набор морфизмов $h_{s's}$ $(s' \in |F'|)$ определяет морфизм $q_{F'F}$ так, что будем писать $q_{F'F} = (h_{s's})_{F'F}$. Каждое множество $F \in \mathcal{F}$ является базисом фильтра подмножеств $T \subset |F|$, причем для каждого $T \in F$ класс $(X_s, h_{\hat{s}s})_T$ направлен в категории $\mathcal{G}^0$.

Определение 1. Класс $(X_s, h_{s's})_{s,s'\in|\mathcal{F}|}$, удовлетворяющий условиям $1^0 - 3^0$, назовем хаусдорфовым спектром над категорией $\mathcal{G}$ и будем обозначать $\{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$.

Частными случаями хаусдорфова спектра являются прямой (достаточно положить $\mathcal{F} = |\mathcal{F}|$, $h_{s's} \simeq q_{s's}$) и обратный (достаточно положить $\mathcal{F} = \{|\mathcal{F}|\}$, $h_{s's} : X_s \rightsquigarrow X_{s'}$ $(s' \longrightarrow s)$, $q_{F'F} = i_{|F|} = i_{|\mathcal{F}|}$) спектр семейства объектов.

Множество хаусдорфовых спектров над $\mathcal{G}$ при надлежащем определении отображения спектров (см. строение категории $\mathcal{D}(\mathcal{F})$) образуют категорию, которую обозначим $\operatorname{Spect}\mathcal{G}$. Если $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$, $\mathcal{G} = \{Y_p, \mathcal{F}^1, h_{p'p}\}$ – объекты из $\operatorname{Spect}\mathcal{G}$, то два отображения хаусдорфовых спектров $\omega_{\mathcal{Y}\mathcal{X}}$: $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ и $\omega'_{\mathcal{Y}\mathcal{X}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ назовем эквивалентными, если для любого $F \in \mathcal{F}$ существует $F^* \in \mathcal{F}^1$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & & Y_p & & \\ & \omega_{ps} \nearrow & & \searrow h_{p^*p} & \\ X_s & & & & Y_{p^*} \\ & \omega'_{p's} \searrow & & \nearrow h_{p^*p'} & \\ & & Y_{p'} & & \end{array}$$

коммутативна для любого $p^* \in |F^*|$.

Рассмотрим теперь новую категорию $\mathcal{H}(\mathcal{G})$, объектами которой являются объекты категории $\operatorname{Spect}\mathcal{G}$, а множество $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ образовано классами эквивалентностей отображений $\omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Будем обозначать такие классы $||\omega_{\mathcal{X}\mathcal{Y}}||$.

Для любых объектов $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}$ закон композиции определяет билинейное отображение $\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \times \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ ($\operatorname{Hom}_{\mathcal{H}}(\mathcal{X},$ – абелева группа).

Определение 2. Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – хаусдорфов спектр над категорией $\mathcal{G}$. Объект Z категории $\mathcal{G}$ назовем категорным H-пределом хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$ над $\mathcal{G}$, если для любых объектов $A, B \in \mathcal{G}$ и отображений спектров

$$A \xrightarrow{a} \mathcal{X} \xrightarrow{b} B$$

существует единственная последовательность в $\mathcal{G}$

$$A \xrightarrow{\alpha} Z \xrightarrow{\beta} B$$

такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & B \\ & Z \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \tag{Lim}$$

коммутативна в категории $\operatorname{Spect}\mathcal{G}$.

Частным случаем категорного H-предела являются понятия проективного и индуктивного пределов над категорией $\mathcal{G}$. Пусть, например, $\mathcal{X}$ – обратный спектр объектов из $\mathcal{G}$. Тогда имеет место (Lim), причем в качестве $B \in \mathcal{G}$ можно взять любой объект X_s из $\mathcal{X}$ с тождественным морфизмом $b_s : X_s \longrightarrow X_s$, составляющим отображение спектров $b^s : \mathcal{X} \longrightarrow X_s$ $(s \in |F|)$. Тем самым коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[dr, "b"] & \\ A \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathcal{X} \\ & Z \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

где $b = (b^s)$, $\beta = (\beta^s)$, $\beta^s : Z \longrightarrow X_s$ $(s \in |F|)$, b – тождественный морфизм категории $\operatorname{Spect}\mathcal{G}$. Поэтому коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \\ A \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \\ & Z \arrow[uu, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

для любого объекта $A \in \mathcal{G}$.

Категорный H-предел хаусдорфова спектра (функтор Haus) существует в любой полуабелевой категории $\mathcal{G}$ с прямыми суммами и произведениями (например, категория векторных пространств L, категория TLG топологических векторных групп, категория TLC локально выпуклых пространств).

Пусть Ω – счетное множество и $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – регулярный хаусдорфов спектр в категории TLC; такой спектр называется счетным. H-пространством называется непрерывный линейный образ в категории TLC H-предела $\underset{\mathcal{F}}{\overset{\longleftarrow}{\underrightarrow{\lim}}}\, h_{s's}X_s$ банаховых пространств X_s $(s \in |\mathcal{F}|)$ счетного хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$. Класс H-пространств содержит пространства Фреше и выдерживает операции перехода к счетным индуктивным и проективным пределам, замкнутым подпространствам и фактор-пространствам. Кроме того, для H-пространств справедлив усиленный вариант теоремы о замкнутом графике. Класс H-пространств наиболее широкий из всех известных в настоящее время аналогичных классов Райкова, Вильде, Накамуры, Забрейко-Смирнова. Счетный отделимый H-предел хаусдорфова спектра H-пространств в категории TLC есть H-пространство [12–14].

Всюду в этой работе, если не оговорено противное, хаусдорфовы спектры предполагаются счетными.

2. Пусть $\mathrm{Haus} : \mathcal{H}(TLC) \longrightarrow L$ – ковариантный аддитивный функтор хаусдорфова предела из полуабелевой категории $\mathcal{H}(TLC)$ в абелеву категорию L векторных пространств (над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$). Напомним [11], что инъективной резольвентой I объекта $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(TLC)$ называется любая последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_0 \xrightarrow{i_0} \mathcal{I}_1 \xrightarrow{i_1} \dots,$$

образованная инъективными объектами, точная в членах $\mathcal{I}_k$, $k \geq 1$, в которой $\ker i_0 \simeq \mathcal{X}$. Любые две инъективные резольвенты одного объекта гомотопны между собой. Так как в категории $\mathcal{H}(TLC)$ много инъективных объектов [12], то каждый объект категории $\mathcal{H}(TLC)$ имеет по крайней мере одну инъективную резольвенту. Правые производные функтора хаусдорфова предела Haus определяются формулой

$$\mathrm{Haus}^k(\mathcal{X}) = H^k(\mathrm{Haus}(\mathcal{I})) \quad (k = 0, 1, \dots),$$

где $\mathcal{X} \in \mathcal{H}(TLC)$, $\mathcal{I}$ – любая инъективная резольвента $\mathcal{X}$, $\mathrm{Haus}(\mathcal{I})$ – комплекс морфизмов категории L, полученный применением функтора Haus к каждому морфизму комплекса $\mathcal{I}$, а $H^k(\mathrm{Haus}(\mathcal{I}))$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ – гомологии комплекса $\mathrm{Haus}(\mathcal{I})$. Всякий морфизм $\mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ категории $\mathcal{H}(TLC)$ накрывается морфизмом $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{Y}$ инъективных резольвент объектов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ (см. [11], гл. V, §1). Отсюда вытекает существование морфизмов $\mathrm{Haus}^k(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}^k(\mathcal{Y})$ так, что объекты $\mathrm{Haus}^k(\mathcal{X})$ не зависят от выбора инъективной резольвенты. В то же время функтор Haus имеет инъективный тип [12. С. 88], поэтому имеет место канонический изоморфизм функторов

$$\mathrm{Haus} \simeq \mathrm{Haus}^0.$$

Предложение 3. *Для всякого свободного хаусдорфова спектра* $\mathcal{E} \in \mathcal{H}(L)$

$$\mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{E}) = 0 \quad (i = 1, 2, ...).$$

Для доказательства нам потребуется вспомогательное утверждение о строении свободных хаусдорфовых спектров.

Лемма 1. *Пусть TLC – категория локально выпусклых пространств. Всякий свободный хаусдорфов спектр над TLC с инъективными образующими является инъективным объектом категории $\mathcal{H}(TLC)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I} = \{I_s, G, i_{s's}\}$ – свободный хаусдорфов спектр над категорией TLC с инъективными образующими I^α $(\alpha \in |\hat{G}|)$. Согласно методу трансформации индексов построение свободного хаусдорфова спектра $\mathcal{I}$ из данного хаусдорова спектра $\hat{\mathcal{I}} = \{I^\alpha, \hat{G}, \hat{i}_{\alpha'\alpha}\}$, составленного из инъективных объектов категории TLC, предполагает следующие конструкции.

Сначала для каждого $\hat{F} \in \hat{G}$ определяются прямые произведения $T_{\hat{T}} = \prod\limits_{\alpha \in \hat{T}} I^\alpha$ $(\forall \hat{T} \in \hat{F})$ так, что для $\omega_{\hat{T}\hat{T}'} : \hat{T}' \longrightarrow \hat{T}$ морфизм $\prod\limits_{\hat{T}} I^\alpha \longrightarrow \prod\limits_{\hat{T}'} I^\alpha$ есть канонический морфизм произведения на сомножитель. Затем для любого конечного $H \subset \hat{G}$ определяются пространства $I_s = \prod\limits_{\hat{T}_1} I^\alpha \times \prod\limits_{\hat{T}_2} I^\alpha \times ... \times \prod\limits_{\hat{T}_{|H|}} I^\alpha$, где $H = \{\hat{F}_1, \hat{F}_2, ..., \hat{F}_{|n|}, \hat{T}_i \in \hat{F}_i \; (i = 1, 2, ..., |H|), s = (\hat{T}_1, \hat{T}_2, ..., \hat{T}_{|H|})$.
Таким образом, для $s' = (\hat{T}_1, ..., \hat{T}_{|H|}, \hat{T}_{|H|+1}, ..., \hat{T}_{|H_1|})$ и $H_1 \supset H$, $i_{s's} : I_s \longrightarrow I_{s'}$ есть естественный мономорфизм слагаемого в сумму, G определяется всесозможными конечными $H \subset \hat{G}$.

Пусть теперь $\mathcal{G} = \{Y_p, \mathcal{F}', h_{p'p}\}$ – произвольный хаусдорфов спектр над TLC и $\mathcal{L}$ – подспектр спектра $\mathcal{G}$ так, что $\mathcal{L} = \{Z_p, \mathcal{F}', h_{p'p}\}$, где $Z_p \subset Y_p$ $(p \in |\mathcal{F}'|)$. Пусть далее $\omega_{\mathcal{GL}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{G}$ – отображение хаусдорфовых спектров так, что $\omega_{\mathcal{GL}} = \omega(\varphi, \Phi, \chi)$, где Φ, χ кофинальны в своих областях значений. Очевидно, для доказательства достаточно продолжить морфизмы $\omega_{s\chi(s)} : Z_{\chi(s)} \longrightarrow I_s$ до морфизмов $\omega^*_{s\chi(s)} : Y_{\chi(s)} \longrightarrow I_s$ $(s = (\hat{T}_1, ..., \hat{T}_{|H|}),\ H \subset \hat{G})$. Но объект I^α (α принадлежит T^* – свободному объединению $\hat{T}_i$, $i = 1, 2, ..., |H|$) является инъективным в категории TLC, поэтому существует продолжение $\omega_\alpha : Y_{\chi(s)} \longrightarrow I^\alpha$ морфизмов $\pi_\alpha \circ \omega_{s\chi(s)}$, где $\pi_\alpha : I_s \longrightarrow I^\alpha$ – каноническая проекция. Положим $\omega^*_{s\chi(s)} = (\omega_\alpha)_{\alpha \in T^*}$ так, что $\omega^*_{s\chi(s)} : Y_{\chi(s)} \longrightarrow I_s$; ясно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} Y_{\chi(s)} \arrow[rr, "\omega^*_{s\chi(s)}"] & & I_s \\ & Z_{\chi(s)} \arrow[ul, "i_{\chi(s)}"] \arrow[ur, "\omega_{s\chi(s)}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна и морфизм $\omega^*_{s\chi(s)}$ искомый. Тем самым, существует продолжение $\omega_{\mathcal{I}\mathcal{G}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}$. Лемма доказана.

Доказательство предложения 3. Пусть $\mathcal{E} = \{E_\alpha, G, i_{\alpha'\alpha}\}$ – свободный хаусдорфов спектр над категорией L с образующими E^s. Для каждого s построим инъективную резольвенту для E^s

$$0 \longrightarrow E^s \longrightarrow I^s_0 \longrightarrow I^s_1 \longrightarrow ...$$

и образуем свободные хаусдорфовы спектры $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, ...$ соответственно с инъективными образующими I^s_0, $I^s_1, ...$. Все хаусдорфовы спектры $\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_1, ...$ в силу предложения 3.5 [3] являются инъективными объектами категории $\mathcal{H}(TLC)$, поэтому последовательность отображений хаусдорфовых спектров

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_1 \longrightarrow ...$$

является точной в категории $\mathcal{H}(L)$. Тем самым, последняя последовательность является точной инъективной резольвентой для хаусдорфова спектра $\mathcal{E}$. Отсюда следует точность в категории L последовательности

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{I}_0) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{I}_1) \longrightarrow ... \; .$$

Тем самым, $\mathrm{Haus}^i(\mathcal{E}) = 0$ $(i = 1, 2, ...)$. Предложение доказано.

Вычислим теперь производные функторы Haus^i $(i \geq 1)$ следующим образом (ср. [2], [10]). Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – произвольный хаусдорфов спектр, $\mathcal{E}$ – свободный хаусдорфов спектр с образующими X_s $(s \in |\mathcal{F}|)$. Рассмотрим последовательность отображений хаусдорфовых спектров

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\omega_{\mathcal{E}\mathcal{X}}} \mathcal{E} \xrightarrow{\omega_{\mathcal{E}\mathcal{E}}} \mathcal{E} \longrightarrow 0, \qquad (D)$$

в которой компоненты отображения $\omega_{\mathcal{E}\mathcal{X}}$ (т.е. набор $(\omega_{Ts_T})_{T\in|\varphi(F)|}$, где $s_T \in T$ – единственный максимальный по направлению элемент в T) действуют по формуле

$$\omega_{Ts_T} : x_{s_T} \longmapsto (\hat{h}_{s's_T} x_{s_T})_{s'\in T},$$

а отображение хаусдорфовых спектров $\omega_{\mathcal{E}\mathcal{E}} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ образовано морфизмами (T_n – кофинальная фильтрующая справа последовательность)

$$\omega_{T^*T_n} : (x_s)_{s\in T_n} \longmapsto (x_{s^*} - \hat{h}_{s^*s_{T_n}} x_{s_{T_n}})_{s^*\in T^*}$$

для любого T^*, $T_n \in F$, $F \in \mathcal{F}$, $T_0 = \emptyset$, $T_{n-1} \subset t^* \subset T_n$, $s_{T_n} \not\subset T^*$ $(n = 1, 2, ...)$.

Теперь ясно, что последовательность (D) точна; следуя В.П.Паламодову [2], будем называть последовательность (D) канонической резольвентой хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$.

Применив функтор Haus к канонической резольвенте (D), получим последовательность локально выпуклых пространств

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_{F} X_s \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_{F} X_s,$$

которая ациклична и, более того, точна слева, где $\bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_{F} X_s$ – прямая сумма произведений X_s $(s \in |\mathcal{F}|)$ в естественной топологии индуктивного предела.

Предложение 4. *Пусть* Haus : $\mathcal{H}(TLC) \longrightarrow L$ *и*

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{\omega_{\mathcal{YX}}} \mathcal{Y} \xrightarrow{\omega_{\mathcal{ZY}}} \mathcal{Z} \longrightarrow 0 \qquad (D')$$

– точная последовательность хаусдорфовых спектров. Тогда в категории L *определена точная связующая последовательность*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Z}) \longrightarrow \mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{X})$$

$$\longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{Haus}^{\,i-1}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\tilde{\delta}^{i-1}} \mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\bar{\omega}^{i}_{\mathcal{YX}}} \mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{Y})$$

$$\xrightarrow{\bar{\omega}_{\mathcal{ZY}}} \mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta^{i}} \ldots ,$$

где δ^i $(i = 1, 2, \ldots)$ *– связующие морфизмы.*

Так как в силу предложения 1 получим $\mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{E}) = 0$ для $i \geq 1$, то, очевидно, имеют место изоморфизмы векторных пространств

$$\mathrm{Haus}^{\,i}(\mathcal{X}) = 0 \ \ (i \geq 2), \quad \mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{X}) = \mathrm{Coker}\,\bar{\omega}_{\mathcal{EE}}.$$

Поэтому точной последовательности (D') отвечает точная последовательность векторных пространств

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Z})$$

$$\longrightarrow \mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{Z}) \longrightarrow 0. \qquad (D'')$$

2. В работах [1], [2] В.П.Паламодов установил весьма фундаментальные теоремы 11.1 и 11.2 о необходимых и достаточных условиях обращения в нуль $\mathrm{Pro}^{\,1}(\mathcal{X}) = 0$ для функтора Pro проективного предела счетного семейства локально выпуклых пространств. Мы имеем в виду установить аналогичные условия обращения в нуль $\mathrm{Haus}^{\,1}(\mathcal{X}) = 0$ для функтора хаусдорфова предела и не для обязательно счетного случая.

Напомним, что в вопросах устойчивости класса H-пространств относительно хаусдорфова предела, а также в теореме представления H-пространств посредством банаховых пространств существенным условием было предположение регулярности хаусдорфова спектра. Здесь нам потребуется следующее условие. Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}_T$ – хаусдорфов спектр локально выпуклых пространств, $V_F^T \subset \prod\limits_F X_s$ $(T \in F)$,

$$V_F^T = \{x = (x_s) \in \prod_F X_s : x_{s'} = \hat{h}_{s's} x_s,\ s, s' \in T\},$$

каждое из которых наделено проективной топологией относительно прообразов $\pi_s^{-1}\tau_s$ $(s \in T)$, где $\pi_s : \prod\limits_F X_s \longrightarrow X_s$ – каноническая проекция. Соответствующий базис окрестностей нуля проективной топологии порождает ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(T)})$ $(T \in F)$.

Образуем ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$ с базисом окрестностей нуля V_F^T $(T \in F)$. Хаусдорфов спектр $\mathcal{X}$ называется регулярным, если $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$ удовлетворяет условию: из сходимости сети $(a_\gamma)_{\gamma \in P}$ в ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(T)})$ $(T \in F)$ вытекает сходимость сети (a_γ) в ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$. Если все X_s $(s \in |\mathcal{F}|)$ наделены абсолютно неотделимыми топологиями, то нетрудно видеть, что условие регулярности равносильно полноте $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{X}$ – регулярный хаусдорфов спектр неотделимостей над категорией TLC. Тогда* $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$.

Доказательство. Учитывая (D), достаточно установить, что $\mathrm{Coker}\,\bar{\omega} = 0$, где

$$\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}} : \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_F X_s \longrightarrow \bigoplus_{\mathcal{F}} \prod_F X_s$$

и $\mathcal{E}$ – свободный хаусдорфов спектр с образующими X_s $(s \in |\mathcal{F}|)$. Последнее отображение каждому элементу

$$x = (..., 0, ..., \underbrace{\alpha_1, \alpha_2, ...,}_{F_1} \underbrace{\beta_1, \beta_2, ...,}_{F_2}, ..., \underbrace{\gamma_1, \gamma_2, ...,}_{F_m}, ..., 0, ...)$$

ставит в соответствие элемент

$$y = (..., 0, ..., \underbrace{\alpha_1 - \hat{h}_{1s_{T_1^{(1)}}} \alpha_{s_{T_1^{(1)}}}, ..., \alpha_{s_{T_1^{(1)}}} - \hat{h}_{s_{T_1^{(1)}} s_{T_2^{(1)}}} \alpha_{s_{T_2^{(1)}}}, ...,}_{F_1}$$

$$\underbrace{\beta_1 - \hat{h}_{1s_{T_1^{(2)}}} \beta_{s_{T_1^{(2)}}}, ...,}_{F_2} \underbrace{\gamma_1 - \hat{h}_{1s_{T_1^{(m)}}} \gamma_{s_{T_1^{(m)}}}, ...,}_{F_m} ..., 0, ...),$$

причем ясно, что $\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(\bigoplus_{\mathcal{F}}\prod_{F} X_s)$ плотно в $\bigoplus_{\mathcal{F}}\prod_{F} X_s$.

Покажем, что $\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ является эпиморфизмом. Для этого достаточно установить эпиморфизм $\prod_F X_s \longrightarrow \prod_F X_s$ сужения $\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}$ для каждого $F \in \mathcal{F}$. Проведем доказательство для случая $\mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) = 0$ (действительно, если $\mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \neq 0$, то для некоторых $F \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{T\in F} V_F^T \neq 0$ и $\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}|_{\Pi X_s}^{F} (\bigcap_{T\in F} V_F^T) = 0$). Пусть $(y_s) \in \prod_F X_s$; найдем последовательность $(\alpha_s) \in \prod_F X_s$ такую, что $\alpha_s - \hat{h}_{ss_{T_n}}\alpha_{s_{T_n}} = y_s$, где $s \prec s_{T_n}$; $T_1 \subset T_2 \subset ...$; $s_{T_1}, s_{T_2}, ...$ – кофинальная последовательность $(n = 1, 2, ...)$. Положим для определенности $s_{T_0} = 1$ и составим ряд $(*)$

$$y_{s_{T_0}} + \hat{h}_{s_{T_0}s_{T_1}} y_{s_{T_1}} + \hat{h}_{s_{T_0}s_{T_1}}(\hat{h}_{s_{T_1}s_{T_2}} y_{s_{T_2}}) + ... + \hat{h}_{s_{T_0}s_{T_1}}(...(\hat{h}_{s_{T_n}s_{T_{n+1}}} y_{s_{T_{n+1}}})) + ...$$

Так как полнота ТВГ $V_F^T \subset \prod_F X_s$ следует из условия регулярности хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$, то полными будут и фильтр-топологии (по В.П.Паламодову) в пространствах, базис окрестностей нуля которых образуют пространства $\{\hat{h}_{ss'}X_{s'}\}$, где $s' \in |F|$, $s \succ s'$. Поэтому ряд $(*)$ сходится в пространстве X_1 по фильтртопологии; положим

$$\alpha_1 = \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{h}_{s_{T_0}s_{T_1}} \circ \hat{h}_{s_{T_1}s_{T_2}} \circ ... \circ \hat{h}_{s_{T_n}s_{T_{n+1}}})(y_{s_{T_{n+1}}}).$$

Но ряд

$$y_{s_{T_1}} + \hat{h}_{s_{T_1}s_{T_2}} y_{s_{T_2}} + ... + \hat{h}_{s_{T_1}s_{T_2}}(...(\hat{h}_{s_{T_n}s_{T_{n+1}}} y_{s_{T_{n+1}}})) + ...$$

сходится в пространстве $X_{s_{T_1}}$ по фильтртопологии; положим

$$\alpha_{s_{T_1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{h}_{s_{T_1}s_{T_2}} \circ \hat{h}_{s_{T_2}s_{T_3}} \circ ... \circ \hat{h}_{s_{T_n}s_{T_{n+1}}})(y_{s_{T_{n+1}}})$$

так, что $\alpha_1 - \hat{h}_{1s_{T_1}}\alpha_{s_{T_1}} = y_1$ $(s_{T_0} = 1)$. Аналогично, по индукции, используя полноту пространства X_{T_n} по фильтртопологии, получим равенства $\alpha_{s_{T_n}} - \hat{h}_{s_{T_n}} s_{T_{n+1}} \alpha_{s_{T_{n+1}}} = y_{s_{T_n}}$, где

$$\alpha_{s_{T_n}} = \sum_{k=0}^{\infty}(\hat{h}_{s_{T_n}s_{T_{n+1}}} \circ ... \circ \hat{h}_{s_{T_{n+k}}s_{T_{n+k+1}}})(y_{s_{T_{n+k+1}}})$$

$(n = 0, 1, 2, ...)$. Теперь для $s \prec s_{T_n}$ и $s \neq\prec s_{T_{n-1}}$ можно положить $\alpha_s = y_s + \hat{h}_{ss_{T_n}}\alpha_{s_{T_n}} \in X_s$ $(n = 1, 2, ...)$. Тем самым, $\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}}((\alpha_s)_{s\in|F|}) = (y_s)_{s\in|F|}$ и, следовательно, $\mathrm{Coker}\,\bar{\omega}_{\mathcal{E}\mathcal{E}} = 0$ и $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$. Теорема доказана.

Если $\mathcal{Y}$ – регулярный хаусдорфов спектр над TLC и $\mathcal{X}$ – хаусдорфов спектр неотделимостей, то легко видеть, что $\mathcal{X}$ также регулярный спектр. В самом деле, имея в виду замечание перед теоремой, достаточно установить полноту $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$; последняя ТВГ вложена в соответствующую ТВГ $(\prod\limits_F Y_s, \sigma^1_{(F)})$. Если $(a_\gamma)_{\gamma \in P}$ фундаментальна в $\sigma_{(F)}$, то $a_\gamma \in a_{\gamma_0} + V_F^T$ $(\forall T \in F,\ \gamma \succ \gamma(T),\ \gamma_0 \succ \gamma(T))$ и в силу замкнутости V_F^T последней ТВГ получим включение $(a^* = \lim\limits_P a_\gamma)$

$$a^* - a_{\gamma_0} \in V_F^T \quad (\forall T \in F, \quad \gamma_0 \succ \gamma(T)),$$

что и означает сходимость (a_γ) к a^* в $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$.

Таким образом, в формулировке теоремы 1 регулярность хаусдорфова спектра $\mathcal{X}$ может быть заменена регулярностью хаусдорфова спектра $\mathcal{Y}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{Y}$ – регулярный хаусдорфов спектр, $\mathcal{X}$ – хаусдорфов спектр неотделимостей $\mathcal{Y}$ и*

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}/\mathcal{X} \longrightarrow 0$$

точная последовательность хаусдорфовых спектров. Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Y}) \longrightarrow \mathrm{Haus}\,(\mathcal{Y}/\mathcal{X}) \longrightarrow 0$$

является точной в категории L.

Продолжим рассмотрение вопроса о точности функтора $\mathrm{Haus} : \mathcal{H}(TLC) \longrightarrow L$ для произвольной точной последовательности хаусдорфовых спектров

$$0 \longrightarrow \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Z} \longrightarrow 0.$$

Из проведенных выше доказательств становится очевидным, что достаточным условием для обращения в нуль $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$ является полнота ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$ для каждого $F \in \mathcal{F}$ (ср. предложение 7.1 [3]), где $\mathcal{I}^*_{(F)}$ образована фильтрацией V_F^T по T. В то же время каждое пространство V_F^T наделено линейной топологией прообраза $\sup\limits_T \pi_s^{-1}\tau_s$ $(T \in F)$ (образуя одновременно ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$ так, что ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma_{(F)})$, вообще говоря, неметризуемая. Оказывается, что полнота ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$ является и необходимым условием обращения в нуль $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – счетный хаусдорфов спектр над категорией L. Тогда для того, чтобы $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$ была полной для каждого $F \in \mathcal{F}$.*

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ *– счетный хаусдорфов спектр над категорией* L. *Тогда для того, чтобы* $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $F \in \mathcal{F}$ *в* $\prod\limits_F X_s$ *можно определить квазинорму* $\mu = \mu_F \geq 0$ *такую, что*

i) ассоциированная топологическая группа $(\prod\limits_F X_s, \tau^*_{(F)})$ *полная,* $\tau_F \geq \sigma^*_{(F)}$;

ii) μ^*_F *непрерывна на* $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$.

Доказательство. *Необходимость* следует из рассуждений перед теоремой, так как, полагая $\tau_F = \sigma^*_{(F)}$ и

$$\mu_F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_{T_k}(x),$$

где $d_{T_k}(x) = 0$ для $x \in V_F^{T_k}$ и $d_{T_k}(x) = 1$ для $x \in \prod\limits_F X_s \setminus V_F^{T_k}$ $(k \in \mathbf{N})$, получим i и ii.

Достаточность. Пусть $Z_F = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} V_F^{T_k}$ и факторпространство $\prod\limits_F X_s/Z_F$ наделено образами топологий $\sigma^*_{(F)}$ и τ_F так, что МВГ $(\prod\limits_F X_s/Z_F, d_F)$, где $d_F(\xi) = \inf\limits_{x\in\xi} \mu_F(x)$, отделимая и полная, а МВГ $(\prod\limits_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$, где $\tilde{d}_F(\xi) = \inf\limits_{x\in\xi} \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k} d_{T_k}(x)$, является отделимой. Тем самым функционал d_F является счетно-полуаддитивным на МВГ $(\prod\limits_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$ и $d^*_F(\xi) = \inf\limits_{\xi_n\to\xi} \varliminf\limits_{n\to\infty} d_F(\xi_n) = \inf\limits_{x\in\xi} \mu^*_F(x)$ непрерывен на ней. Откуда в силу леммы о счетно-полуаддитивном функционале [8] получим $d_F = d^*_F$ и, следовательно, МВГ $(\prod\limits_F X_s/Z_F, \tilde{d}_F)$ полная,а, значит, полной будет ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$, что дает возможность заключить, рассматривая все $F \in \mathcal{F}$, что $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$. Теорема доказана.

В случае счетного обратного спектра, в частности, получаем 1 часть теоремы 11.1.1 из [1], в случае прямого спектра $\mathcal{X}$ топология τ_F абсолютно неотделимая для каждого одноточечного $F \in \mathcal{F}$. Более того, знаменитая лемма В.П.Паламодова [1], составляющая ядро доказательства, является частным случаем леммы о счетно-полуаддитивном функционале [8].

Далее φ^s_F обозначает фильтртопологию в X_s $(s \in |F|)$, образованную пространствами $\{\hat{h}_{ss'}X_{s'}\}$ $(s' \in |F|)$. Отметим, однако, что произведение топологий φ^s_F $(s \in |F|)$ в $\prod\limits_F X_s$, вообще говоря, не совпадает с топологией $\sigma^*_{(F)}$.

Более удобные для приложений достаточные условия обращения в нуль $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$ даны в следующем утверждении.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – счетный хаусдорфов спектр над категорией L. Для того, чтобы $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$, достаточно, чтобы для каждого $s \in |\mathcal{F}|$ в X_s можно ввести семейство квазинорм $\{\rho_{\beta s}\}$, задающее полное отделимое псевдотопологическое векторное пространство $(X_s, \rho_{\beta s})$, сохраняющее непрерывность морфизмов $\hat{h}_{s's}$ и так, что для каждого $s \in |F|$, $F \in \mathcal{F}$ выполнено условие:*

A) функционал $\rho^*_{b e_s s}$ для некоторого $\beta_s = \beta_s(F)$ непрерывен в фильтртопологии (X_s, φ^s_F).

В частности, в случае обратного спектра $\mathcal{X}$ получим теорему 5.1 из [2], причем наше утверждение является более сильным уже в этом случае.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – счетный хаусдорфов спектр отделимых H-пространств над категорией TLC. Тогда для того, чтобы $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы пространства (X_s, φ^s_F) $(s \in |F|)$ для каждого $F \in \mathcal{F}$ были полными ТВГ.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$. Тогда в силу предложения 3 ТВГ $(\prod\limits_F X_s, \sigma^*_{(F)})$ является полной для каждого $F \in \mathcal{F}$; тем самым полными будут пространства X_s по своим фильтртопологиям φ^s_F $(s \in |F|)$ как фактор-пространства ТВГ счетного характера.

Достаточность. Пусть $F \in \mathcal{F}$, $s \in |F|$. Напомним, что H-пространство (X_s, τ_s) имеет представление [6]

$$X_s = \bigcup_{P_s \in \mathcal{P}_s} \bigcap_{t \in P_s} X^s_t,$$

где X^s_t $(t \in P_s)$ наделены полуметризуемой топологией так, что ассоциированная ТВГ $X^s_{(P_s)}$ в X_s является полной МВГ, непрерывно вложенной в (X_s, τ_s); пусть $\rho^{P_s}_s$ – соответствующая квазинорма для $X^s_{(P_s)}$. Из теоремы о замкнутом графике для H-пространства следует, что семейство $\{\rho^{P_s}_s\}$ задает полное отделимое псевдотопологическое векторное пространство $(X_s, \rho^{P_s}_s)$, непрерывно вложенное в (X_s, τ_s). Покажем выполнение условия А) теоремы 4.

От противного. Предположим, что $(\rho^{P_s}_s)^*$ не является непрерывным в фильтртопологии φ^s_F ни для одного $P_s \in \mathcal{P}_s$. Последнее означает, что для $P_s \in \mathcal{P}_s$ существует $\varepsilon = \varepsilon(P_s) > 0$ и $\varepsilon \in \mathbf{Q}$ такое, что $\hat{h}_{ss^*} X_{s^*} \not\subset V^*_{\varepsilon(P_s)}$, где $s^* \succ s$,

$$V^*_\varepsilon = \{x \in X_s : (\rho^{P_s}_s)^*(x) \le \varepsilon\}, \quad (P_s \in \mathcal{P}_s).$$

Несмотря на то, что семейство $\mathcal{P}_s$, вообще говоря, континуальное, среди множеств $V^*_{\varepsilon(P_s)}$ будет не более чем счетное число различных. Пусть это будут множества $V^*_{\varepsilon_1}$, $V^*_{\varepsilon_2}$, ... Из представления H-пространства и построения следует, что

$$X_s = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \bigcup_{\lambda > 0} \lambda V^*_{\varepsilon_n 2^{-1}}$$

и, следовательно, в силу полноты ТВГ (X_s, φ^s_F) найдется $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $V^*_{\varepsilon_{n_0} 2^{-1}}$ плотно (в топологии φ^s_F) в некотором шаре топологии φ^s_F. Однако лебеговы множества V^* симметричные и замкнутые в топологии φ^s_F, поэтому существует $s^*_0 \in |F|$ такое, что $\hat{h}_{ss^*_0} X_{s^*_0} \subset \bar{V}^*_{\varepsilon_{n0}} = V^*_{\varepsilon_{n0}}$, что противоречит выбору $\varepsilon = \varepsilon(P_s)$ $(P_s \in \mathcal{P}_s)$.

Теперь достаточность следует из теоремы 4. Предложение доказано.

В случае обратного спектра пространств Фреше теорема 5 обобщает критерий Ф) и Р) следствия 11.4. В.П.Паламодова [1]. Заметим, что в теореме 5 фактически требуется отделимость псевдотопологии, поэтому H-пространство, вообще говоря, может быть неотделимым.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{X} = \{X_s, \mathcal{F}, h_{s's}\}$ – счетный хаусдорфов спектр H-пространств с отделимой ассоциированной псевдотопологией $\{\rho^{P_s}_s)^*\}$ над категорией TLC, сохраняющей непрерывность морфизмов $h_{s's}$. Тогда для того, чтобы $\mathrm{Haus}^1(\mathcal{X}) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $s \in |\mathcal{F}|$ существовала квазинорма $\rho^{P_s}_s(F)$ $(s \in |F|)$ в X_s такая, что $A')$ $(\rho^{P_s}_s)^*$ непрерывна в фильтртопологии φ^s_F, система $\{\rho^{P_s}_s\}$ сохраняет непрерывность морфизмов $h_{s's}$.*

В частности, из теоремы 6 получаем теорему Ретаха [9].

Библиографический список

1. Паламодов, В.П. Функтор проективного предела в категории топологических линейных пространств [Текст] // Мат. сб. − 1968. − Т. 75, N 4.С. 567−603.
2. Паламодов, В.П. Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств [Текст] // Успехи мат. наук. − 1971. − Т. 26, N 1. − С. 3–65.
3. Смирнов, Е.И. Теория хаусдорфовых спектров и ее приложения [Текст] Ярославль, 1988. − 178 с. − Деп. ВИНИТИ 28.12.1988, N 9081−В88.
4. Смирнов, Е.И. О хаусдорфовом пределе локально выпуклых пространств [Текст] // Сиб. мат. журн. − М., 1986. − Деп. ВИНИТИ 28.12.86, N 2507−В.
5. Райков, Д.А. Двусторонняя теорема о замкнутом графике для топологических линейных пространств [Текст] // Сиб. мат. журн. − 1966. − Т. 7, N 2. − С. 353−372.
6. Забрейко, П.П., Смирнов, Е.И. К теореме о замкнутом графике [Текст] // Сиб. мат. журн. − 1977. − Т. 18, N 2. − С. 305−316.
7. Wilde M. Reseaus dans lrs espaces lineaires a seminormes // Mem. Soc. Roi. Sci. Liege. − 1969. − V. 18, N 2. − P. 1−104.
8. Смирнов, Е.И. О непрерывности полуаддитивного функционала [Текст] // Мат. заметки. − 1976. − Т. 19, N 4. − С. 541−548.
9. Ретах, В.С. О сопряженном гомоморфизме локально выпуклых пространств [Текст] // Функц. анализ и его приложения. − 1969. − Т. 3, N 4. − С. 63−71.
10. Nobeling C. Uber die Derivierten des Inversen und des Directen Limes einer Modulfamilie // Topology I. − 1962. − P. 47−61.
11. Картан, А., Эйленберг, С. Гомологическая алгебра [Текст]. − М.: Мир, 1960.
12. Смирнов, Е.И. Хаусдорфовы спектры в функциональном анализе [Текст]. − М., 1994. − 161 с.
13. Smirnov E.I. Hausdorff spectra and the closed graph theorem. Pitman Research Notes in Mathematics Series, Proceedings Volum, Longman, England, 1994, P.37−50.
14. Smirnov E.I. The theory of Hausdorff spectra in the category of locally convex spaces. Functiones et Aproximatio, XXIV, 1996, UAM, Poznan, Poland, P.17−33.