Дисперсионный анализ влияния интегративных занятий на качество усвоения математических знаний

Е. И. Смирнов, Е. Н. Трофимец

Рассматривается применение дисперсионного анализа для обработки результатов педагогического эксперимента по внедрению интегративных занятий в процесс обучения математике студентов экономических специальностей вузов.

Ключевые слова: дисперсионный анализ, наглядное моделирование, методы математической статистики, педагогический эксперимент.

The Dispersive Analysis of Influence of Integrative Classes on Quality of Mastering Mathematical Knowledge

E. I. Smirnov, E. N. Trofimets

Application of an analysis of dispersive for handling outcomes of pedagogical experiment on introduction of integrative lessons in process of tutoring Mathematics of students of economic specialized of high schools is considered.

Key words: the dispersive analysis, evident modeling, methods of mathematical statistician, pedagogical experiment.

Педагогический эксперимент заключается в целенаправленном педагогическом воздействии на объект (например, группу учащихся), призванном изменить его состояние определенным образом. Целью проведения педагогического эксперимента является эмпирическое подтверждение или опровержение гипотезы исследования и справедливости теоретических результатов. Собственно, педагогическое воздействие – его состав, структура, свойства и т. д. – и есть результат теоретической части педагогического исследования. Примерами воздействия являются новые содержание, формы, методы и средства обучения. Следовательно, при проведении педагогического эксперимента необходимо обосновать, что состояние объекта изменилось, причем в требуемую сторону. Но этого оказывается недостаточно – необходимо также обосновать, что изменения произошли именно в результате произведенного воздействия.

Для аргументированного обоснования таких изменений результаты педагогических экспериментов обычно обрабатываются методами математической статистики. В практике педагогических исследований наибольшее распространение получили параметрические и непараметрические методы проверки статистических гипотез, в основе которых лежат процедуры расчета соответствующих критериев.

К параметрическим критериям относятся критерий Стьюдента, критерий Уолша, критерий Кохрана – Кокса, критерий Полсона и другие; к непараметрическим – критерий Манна – Уитни, критерий Кенуя, критерий Ван дер Вардена, критерий Хаги и др. Непараметрические методы применяются тогда, когда нет достаточных оснований для того, чтобы выдвинуть предположение о нормальном распределении обрабатываемых данных. К достоинствам этих методов также следует отнести и то, что они не требуют проведения сложных вычислительных расчетов. В том случае, если имеются достаточные основания предполагать о нормальном распределении исследуемых групп, следует применять параметрические методы, так как они обладают большей статистической мощностью по сравнению с непараметрическими методами. Кроме того, некоторые из этих методов, в частности дисперсионный анализ, позволяют провести более глубокое исследование сравниваемых групп. Практическая апробация и сравнительный анализ некоторых из указанных методов были проведены на основе данных педагогического эксперимента по внедрению интегративных занятий в курс высшей математики студентов инженерно-экономического факультета Ярославского государственного технического университета.

Технология обучения с использованием интегративных занятий на основе наглядного моделирования экономических явлений – это процесс объединения дидактических компонентов в целостное образование, проявляющийся через единство с противоположным ему процессом расчленения (дифференциацией). В освоении математических и специальных знаний, в свою очередь, интегративные занятия по математике – это взаимопроникновение и взаимосвязь математических компонентов с целью решения профессионально ориентированных задач.

Обоснование возможности использования наглядного моделирования как средства интеграции математических знаний в процессе обучения студентов-экономистов проведено на основе авторского подхода Е. И. Смирнова [2; 3]. В соответстствии с основными положениями этого подхода, понятие моделирования тесно связано с понятием наглядности обучения. Так, модель становится наглядной только тогда, когда она адекватно актуализируется в мышлении студента реальными задачами и производственными ситуациями, устойчивыми ассоциациями, личностным смыслом деятельности на фоне адекватной структурированности объекта непосредственного восприятия, внутренней интерпретируемости, активности остаточного фрейма и связности составных частей целого. Таким образом, даже если априорная модель экономического объекта оптимально проектируема какой-либо формой представления знания (логической, семантической, фреймовой и т. п.), наглядной она становится лишь в процессе познавательной деятельности студента и управляющих воздействий преподавателя на пути понимания студентом ее сущности. Таким образом, ключевое отличие наглядного моделирования от моделирования заключается в том, что в целеполагании моделирования априори не заложено адекватное усвоение учебного элемента личностью. В моделировании работают с моделью, а в наглядном моделировании включается субъект – студент, его мышление, восприятие, деятельность, и тогда модель становится адекватной и усвояемой.

При планировании эксперимента была выдвинута гипотеза о влиянии на качество усвоения учебного материала двух факторов: уровня математической подготовки обучаемых и технологии обучения (с использованием и без использования интегративных занятий).

Схема формирования экспериментальной и контрольной групп в педагогическом эксперименте состояла в следующем (рис. 1). Были выделены семь учебных групп (175 обучаемых), четыре из которых предполагалось обучать с использованием интегративных занятий, а три – без использования. На первом этапе из выбранных учебных групп были сформированы экспериментальная и контрольная группы (по 60 обучаемых каждая), которые и образовали статистический комплекс для обработки результатов эксперимента.

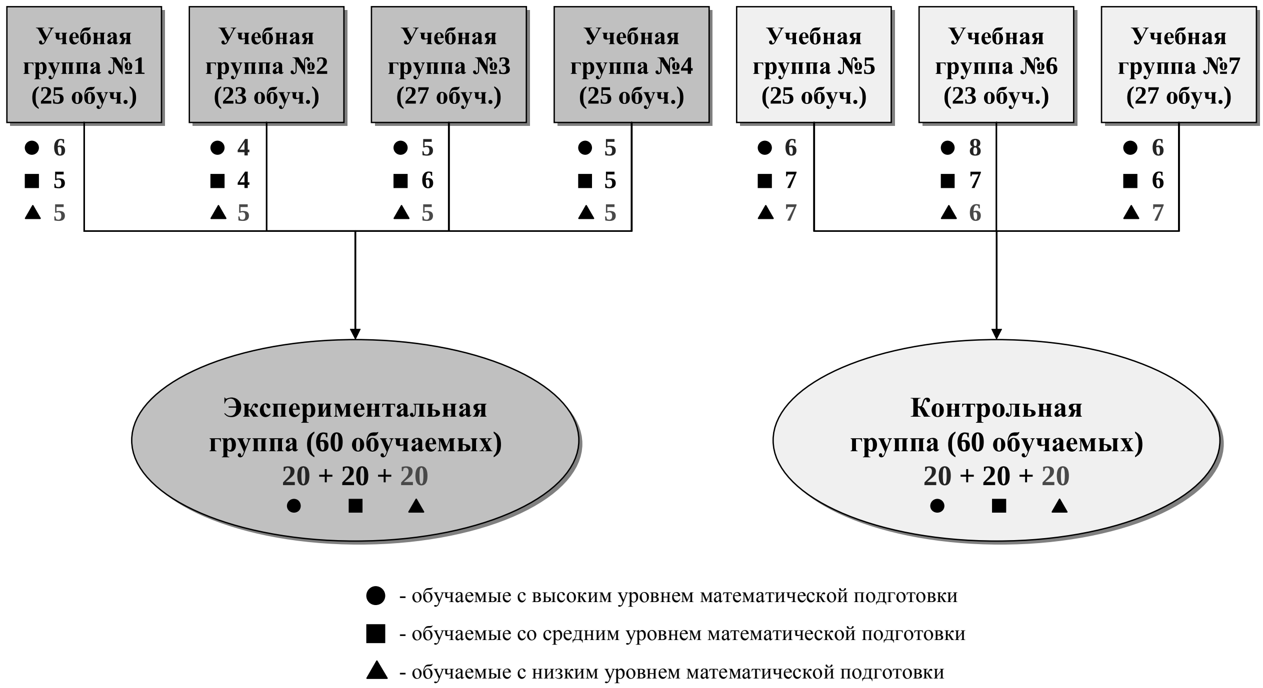

Рис. 1. Схема формирования экспериментальной и контрольной групп

Чтобы повысить достоверность результатов эксперимента, в контрольную и экспериментальную группы были отобраны обучаемые с примерно одинаковым уровнем математической подготовки (по 20 обучаемых с высоким, средним и низким уровнем математической подготовки в каждой группе, см. рис. 1). Формирование таких групп осуществлялось на основе оценок, полученных по математике на Едином государственном экзамене. Обучаемые, получившие 70 баллов и выше, были отнесены к подгруппе с высоким уровнем математической подготовки; обучаемые, получившие от 55 до 69 баллов включительно, – к подгруппе со средним уровнем математической подготовки; и обучаемые, получившие менее 55 баллов, – к подгруппе с низким уровнем математической подготовки.

Подтверждение однородности сформированных групп было проведено на основе U-критерия Манна – Уитни, расчетное значение которого составило 1723,5. Для уровня значимости α=0,05 и n=60 критическое значение критерия составляет 1486. По условиям применения критерия нулевая гипотеза об отсутствии различия по уровню математической подготовки сравниваемых групп отвергается, если $U<U_{крит}$. Так как 1723,5>1486, то нулевую гипотезу следует принять, то есть можно утверждать, что сформированные экспериментальная и контрольная группы по уровню математической подготовки являются однородными. Таким образом, имеются все основания переходить ко второму этапу эксперимента – педагогическому воздействию на обучаемых с использованием (в экспериментальной группе) и без использования (в контрольной группе) инновационной педагогической технологии.

Цель применения педагогической технологии – научить решать не только типовые задачи учетно-расчетного характера, при решении которых доминирующую роль играет операционная составляющая, но и сложные аналитические задачи, при решении которых доминирующую роль играет интеллектуальная составляющая, базирующаяся на умении анализировать текущее и прогнозировать будущее состояние экономических объектов и процессов, мыслить и действовать в изменяющихся условиях, моделировать и находить оптимальные решения, основанные на применении современных математических моделей и методов.

В разработанной технологии учитываются потребности практики в вопросах подготовки экономистов, что находит своё отражение в профессиональной ориентации отобранных экономических задач. Отбор таких задач был произведен на основе следующих критериев:

- наличие экономической фабулы задачи, способствующей проявлению творческой активности студента в обучении математике;
- присутствие основных и доступных проблем, характерных для сферы экономики и финансов;
- технологическая направленность процесса, то есть соблюдение правил и норм, требующих соответствия полученного результата его целевому назначению;
- интеграция математических знаний, проявляющаяся либо в условии, либо в процессе решения экономической задачи.

1. Контроль качества усвоения знаний студентами в экспериментальной и контрольной группах осуществлялся в ходе проведения итоговых практических занятий и лабораторных работ. При проведении эксперимента применялась десятибалльная шкала оценок. Между оценками этой шкалы и оценками традиционной пятибалльной шкалы было установлено соответствие, приведенное в таблице 1.

Таблица 1

Оценка по десятибалльной шкале	**Оценка по пятибалльной шкале**
10	5+
9	5
8	5–
7	4+
6	4
5	4–
4	3+
3	3
2	3–
1	2

После проведения занятий в учебных группах итоговые оценки студентов были консолидированы в статистический комплекс в соответствии со сформированными экспериментальной и контрольной группами. Обобщенные по данным статистического комплекса итоговые оценки в этих группах приведены в таблице 2. На заключительном этапе педагогического эксперимента с использованием вышеупомянутых параметрических и непараметрических методов была проведена обработка данных сформированного статистического комплекса.

Исходя из того, что непараметрические методы не требуют проведения сложных вычислительных расчетов, было принято решение на этапе обработки результатов эксперимента использовать именно эти методы. Для проверки нулевой гипотезы об отсутствии различия между сравниваемыми группами был использован непараметрический U-критерий Манна – Уитни. Расчетное по исследуемому статистическому комплексу значение U-критерия составило 1004. Так как 1004<1486, то на уровне значимости α=0,05 нулевую гипотезу отвергаем, то есть можно утверждать, что различие между экспериментальной и контрольной группами является статистически достоверным.

Таблица 2

Оценки обучаемых по 10-балльной шкале	**Число обучаемых, задействованных в педагогическом эксперименте**					
	Экспериментальная группа			**Контрольная группа**		
	ВУМП	**СУМП**	**НУМП**	**ВУМП**	**СУМП**	**НУМП**
10	6	–	–	2	–	–
9	8	4	–	4	–	–
8	4	2	2	4	4	–
7	2	8	–	6	–	–
6	–	6	4	4	1	–
5	–	–	6	–	3	3
4	–	–	6	–	6	4
3	–	–	2	–	4	5
2	–	–	–	–	2	2
1	–	–	–	–	–	6
Итого	20	20	20	20	20	20

* ВУМП – высокой уровень математической подготовки (70 баллов и выше по результатам ЕГЭ);
СУМП – средний уровень математической подготовки (от 55 баллов до 69 баллов включительно по результатам ЕГЭ);
НУМП – высокой уровень математической подготовки (менее 55 баллов по результатам ЕГЭ)

В том случае, если имеются достаточные основания принять гипотезу о нормальном распределении исследуемых групп, следует применять параметрические методы, так как они обладают бóльшей статистической мощностью по сравнению с непараметрическими методами. Проверка гипотезы о нормальном распределении исследуемых групп была проведена с помощью критерия χ^2, получившего также название критерия согласия Пирсона. Статистики этого критерия вычисляются по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{v} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{v} \frac{(f_{\text{Ý}i} - f_{\text{Ò}i})^2}{f_{\text{Ò}i}},$$

где n – объем выборки;
v – число групп вариационного ряда;
p_i – теоретическая вероятность попадания случайной величины в i-ю группу;
$m_i=f_{\text{Э}i}$ – фактическое число значений в i-й группе, то есть эмпирическая частота;
$np_i=f_{\text{Т}i}$ – теоретическое число значений в i-й группе, то есть теоретическая частота.

При использовании критерия χ^2 нулевая гипотеза сводится к предположению, что несоответствие эмпирических частот частотам теоретическим (то есть вычисленным по тому или иному закону распределения) является случайным, то есть между эмпирическими и теоретическими частотами статистической разницы нет. Нулевая гипотеза опровергается, если $\chi^2 \geq \chi^2_{крит}$ для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $k=v–l–1$, где v – число групп вариационного ряда; l – число неизвестных параметров предполагаемой модели (для модели нормального распределения $l=2$).

Последовательность расчета критерия χ^2 для экспериментальной группы приведена в табл. 3, последовательность расчета критерия χ^2 для контрольной группы – в табл. 4. Следует заметить, что правильное применение критерия χ^2 требует, чтобы эмпирические частоты вариант были не менее 5. Если их меньше 5, то они объединяются с частотами соседних вариант, чтобы в сумме составлять величину, большую или равную 5 (в табл. 3 и в табл. 4 такие варианты отмечены серым цветом). Число степеней свободы устанавливается по вторичному числу вариант.

Так, в экспериментальной группе объединяются первая и вторая варианты, поэтому число степеней свободы $k=7–2–1=4$. Таким образом, для $k=4$ и $\alpha=0{,}05$ имеем $\chi^2_{крит}=9{,}49$. Расчетное значение $\chi_э^2 = 6{,}75$, так что $\chi_э^2 < \chi^2_{крит}$, и нулевая гипотеза не отвергается, то есть оценки в экспериментальной группе распределены по нормальному закону.

В контрольной группе объединяются первая и вторая, а также девятая и десятая варианты, поэтому число степеней свободы k=8–2–1=5, таким образом для k=5 и α=0,05 имеем $\chi^2_{крит}$=11,07. Расчетное значение $\chi_э^{\ 2} = 7{,}03$, так что $\chi_э^{\ 2} < \chi^2_{крит}$ и нулевая гипотеза также не отвергается, то есть оценки в контрольной группе распределены по нормальному закону.

Таблица 3

Оценки, баллы	**Частота эмпир. ($f_Э$)**	**Функция плотности норм. расп. $f(x)$**	**Частота теорет. ($f_Т = f(x)n$)**	$f_Э - f_Т$	$\frac{(f_Э - f_Т)^2}{f_Т}$
3	2	0,02507	1,50		
4	6	0,06207	3,72	2,77	1,47
5	6	0,11890	7,13	-1,13	0,18
6	10	0,17621	10,57	-0,57	0,03
7	10	0,20206	12,12	-2,12	0,37
8	8	0,17925	10,76	-2,76	0,71
9	12	0,12303	7,38	4,62	2,89
10	6	0,06533	3,92	2,08	1,10
$n=\Sigma f_Э$	60			χ^2	6,75
Среднее ($\bar{x}$)	7,03	Станд. откл. (σ)	1,97	$\chi^2_{крит}$	9,49

Таблица 4

Оценки, баллы	**Частота эмпир. ($f_Э$)**	**Функция плотности норм. расп. $f(x)$**	**Частота теорет. ($f_Т = f(x)n$)**	$f_Э - f_Т$	$\frac{(f_Э - f_Т)^2}{f_Т}$
1	6	0,04511	2,71		
2	4	0,07689	4,61	2,68	0,98
3	9	0,11276	6,77	2,23	0,74
4	10	0,14232	8,54	1,46	0,25
5	6	0,15458	9,27	-3,27	1,16
6	5	0,14447	8,67	-3,67	1,55
7	6	0,11620	6,97	-0,97	0,14
8	8	0,08043	4,83	3,17	2,09
9	4	0,04791	2,87	1,65	0,63
10	2	0,02456	1,47		
$n=\Sigma f_Э$	60			χ^2	7,53
Среднее ($\bar{x}$)	5,05	Станд. откл. (σ)	2,58	$\chi^2_{крит}$	11,07

Подтверждение гипотезы о нормальном распределении оценок в сравниваемых группах позволило для их дальнейшего исследования использовать аппарат дисперсионного анализа.

2. Дисперсионный анализ характеризуется строгой логичностью и последовательностью вычислительных операций. Ценность этого метода заключается и в том, что он позволяет не только подтвердить (или опровергнуть) различие между сравниваемыми группами, но и выявить суммарное действие факторов, действие каждого регулируемого в эксперименте фактора, а также действие различных сочетаний факторов друг с другом на результативный признак. Так как в проведенном эксперименте учитывалось влияние двух факторов (уровень математической подготовки обучаемых и наличие инновацион-

ной технологии обучения), то использовался двухфакторный дисперсионный анализ.

Двухфакторный дисперсионный анализ может иметь две разновидности: без повторений и с повторениями [1]. В первом случае каждому уровню факторов соответствует только одна выборка данных, во втором – определенным уровням факторов может соответствовать более одной выборки данных. Для повышения достоверности результатов в рассматриваемом эксперименте использовался метод двухфакторного дисперсионного анализа с повторениями, схема проведения которого приведена ниже.

Обработка результатов эксперимента с использованием метода двухфакторного дисперсионного анализа с повторениями

Исходные данные:

- фактор A – уровень математической подготовки;
- фактор B – технология обучения;
- m_A – число градаций фактора A (m_A = 3 – высокий, средний, низкий);
- m_B – число градаций фактора B (m_B = 2 – с использованием интегративных занятий, без использования интегративных занятий);
- n – число вариант для одной градации фактора A и фактора B (n = 20);
- n_A – количество вариант в одной градации фактора A ($n_A = m_B \times n = 2\times20 = 40$);
- n_B – количество вариант в одной градации фактора B ($n_B = m_A \times n = 3\times20 = 60$);
- N – общая численность вариант ($N = m_A \times m_B \times n = 3\times2\times20 = 120$);
- x_i – варианты, входящие в состав дисперсионного комплекса (нумерация i сверху-вниз).

Этапы проведения дисперсионного анализа:

1. Нахождение общей суммы квадратов отклонений (см. таблицу 2):

$$S_Y = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N} = 5121{,}00 - 4380{,}21 = 740{,}79.$$

2. Нахождение общей факторной (S_Φ) и остаточной ($S_\text{О}$) суммы квадратов отклонений:

$$S_\Phi = \sum \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i-1}^{N} x_i\right)^2}{N} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i\right)^2}{20} + \frac{\left(\sum_{i=21}^{40} x_i\right)^2}{20} + \frac{\left(\sum_{i=41}^{60} x_i\right)^2}{20} + \frac{\left(\sum_{i=61}^{80} x_i\right)^2}{20} + \frac{\left(\sum_{i=81}^{100} x_i\right)^2}{20} + \frac{\left(\sum_{i=101}^{120} x_i\right)^2}{20} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{120} x_i\right)^2}{120} = 515{,}84.$$

$$S_\text{О} = S_Y - S_\Phi = 740{,}79 - 515{,}84 = 224{,}95.$$

3. Нахождение суммы квадратов отклонений для факторов A и B:

$$S_A = \sum \frac{\left(\sum x_A\right)^2}{n_A} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N} =$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{20} x_i + \sum_{i=61}^{80} x_i\right)^2}{40} + \frac{\left(\sum_{i=21}^{40} x_i + \sum_{i=81}^{100} x_i\right)^2}{40} + \frac{\left(\sum_{i=41}^{60} x_i + \sum_{i=101}^{120} x_i\right)^2}{40} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{120} x_i\right)^2}{120} = 388{,}02.$$

$$S_B = \sum \frac{\left(\sum x_B\right)^2}{n_B} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N} = \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{60} x_i\right)^2}{60} + \frac{\left(\sum\limits_{i=61}^{120} x_i\right)^2}{60} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{120} x_i\right)^2}{120} = 118{,}01.$$

4. Нахождение суммы квадратов отклонений для совместного действия факторов:

$$S_{AB} = S_\Phi - (S_A + S_B) = 515{,}84 - (388{,}02 + 118{,}01) = 9{,}82.$$

5. Расчет числа степеней свободы:

- для общей дисперсии: $k_Y = N - 1 = 120 - 1 = 119$;
- для общей факторной дисперсии: $k_\Phi = m_A\, m_B - 1 = 6 - 1 = 5$;
- для дисперсии по фактору A: $k_A = m_A - 1 = 3 - 1 = 2$;
- для дисперсии по фактору B: $k_B = m_B - 1 = 2 - 1 = 1$;
- для дисперсии совместного действия: $k_{AB} = (a - 1)(b - 1) = 2$;
- для остаточной дисперсии: $k_О = N - m_A\, m_B = 120 - 6 = 114$.

6. Нахождение оценок дисперсий:

- по фактору A: $s_A^2 = \dfrac{S_A}{m_A - 1} = \dfrac{388{,}02}{3-1}$ =194,01;
- по фактору B: $s_B^2 = \dfrac{S_B}{m_B - 1} = \dfrac{118{,}01}{2-1}$ =118,01;
- совместной по факторам A и B: $s_{AB}^2 = \dfrac{S_{AB}}{(m_A - 1)(m_B - 1)} = \dfrac{13{,}40}{(3-1)(2-1)}$ =4,91;
- остаточной: $s_О^2 = \dfrac{S_О}{N - m_A m_B} = \dfrac{224{,}95}{120-6}$ =1,97.

7. Нахождение дисперсионных отношений:

- по фактору A: $\dfrac{s_A^2}{s_О^2} = \dfrac{194{,}01}{1{,}97}$ =98,32;
- по фактору B: $\dfrac{s_B^2}{s_О^2} = \dfrac{118{,}01}{1{,}97}$ =59,80;
- совместно по факторам A и B: $\dfrac{s_{AB}^2}{s_О^2} = \dfrac{4{,}91}{1{,}97}$ =2,49.

8. Нахождение для факторов A и B критических значений по таблице Фишера (для уровня значимости α=0,05) и сравнение их с дисперсионными отношениями этих факторов:

- по фактору A: для уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы $k_A = 2$, $k_О = 114$ находим $F_A^{кр}$ =3,08; так как 98,32>3,08, то нулевая гипотеза опровергается, то есть считаем, что уровень математической подготовки обучаемых влияет на качество усвоения ими учебного материала;
- по фактору B: для уровня значимости α=0,05 и числа степеней свободы $k_B = 1$, $k_О = 114$ находим $F_A^{кр}$ =3,92; так как 59,8>3,92, то нулевая гипотеза опровергается, то есть считаем, что технология обучения (с использованием или без использования интегративных занятий) влияет на качество усвоения учебного материала.

9. Оценка степени влияния факторов *A* и *B* по способу Плохинского (расчет выборочных коэффициентов детерминации):

– $\tilde{\rho}_A^2 = \dfrac{S_A}{S_Y} = \dfrac{388{,}02}{740{,}79}$ = 0,52 = 52 % – степень влияния фактора *A*;

– $\tilde{\rho}_B^2 = \dfrac{S_B}{S_Y} = \dfrac{118{,}01}{740{,}79}$ = 0,16 = 16 % – степень влияния фактора *B*.

Для снижения трудоемкости процесса обработки результатов эксперимента он может быть автоматизирован с использованием программной надстройки MS Excel «Пакет анализа» (режим «Двухфакторный дисперсионный анализ с повторениями»).

В результате проведенного эксперимента установлено, что около 52 % общей выборочной вариации оценок связано с влиянием уровня математической подготовки обучаемых и около 16 % – с влиянием технологии обучения (оставшиеся 32% приходятся на действие неучтенных в эксперименте факторов). Таким образом, можно сделать вывод, что использование интегративных занятий в процессе обучения математике студентов вузов экономической ориентации оказывает заметное положительное влияние на качество усвоения учебного материала.

Следует отметить, что дисперсионный анализ с точки зрения объема вычислительной работы значительно сложнее процедур расчета большинства параметрических и непараметрических критериев, но этот недостаток полностью компенсируется более глубоким исследованием сравниваемых групп. Другой недостаток дисперсионного анализа состоит в том, что его обоснованное применение предполагает нормальное распределение исследуемых групп, поэтому одним из направлений развития методов обработки результатов педагогических экспериментов нами видится применение непараметрического дисперсионного анализа.

Библиографический список

1. Лакин, Г. Ф. Биометрия [Текст] / Г. Ф. Лакин. – М. : Высшая школа, 1990. – 350 с.
2. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст] : учебн. пособие / под ред. В. Д. Шадрикова. – М. : Гардарики, 2002. – 383 с.
3. Смирнов, Е. И. Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] / Е. И. Смирнов. – Ярославль, 1998. – 335 с.