Варьирование как метод построения систем задач по математике

Г. И. Ковалёва

В статье рассмотрена суть варьирования компонентов задачи как метода построения системы задач по математике для средней школы. Приведены различные приемы варьирования: приемы взаимообратных и противоположных задач, обобщения и конкретизации, аналогии, а также модельные примеры.

Ключевые слова: система задач, неопределенная задача, переопределенная задача, противоречивая задача, вариативная задача, задача с несформированным требованием.

Variation as a Method of Complex of Problems Construction on Mathematics

G. I. Kovalyova

Construction methods by complex of problems on Mathematics for a secondary school are considered using a variation of tasks component. We use different methods of variation: inverse and opposite problems, generalization, concretization, analogies. Model examples are considered.

Key words: complex of problems, indefinite problems, overdetermined problems, contradictory problems, variable problems, incomplete problems.

Правильно сконструированная система задач дает полноту представлений, облегчает математическое обобщение, способствует гибкости, глубине и осознанности знаний. Организация обучения посредством решения систем учебных задач позволяет повторить, обобщить и систематизировать ранее изученный материал, увидеть взаимосвязи отдельных тем школьного курса математики, вооружить учащихся различными методами решения основных типов задач, поэтому для эффективного достижения целей образования необходимо использовать в учебном процессе систему задач.

Под *системой задач* будем понимать совокупность подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводит к заранее намеченному результату.

Одним из методов конструирования систем задач является *метод варьирования задачи*. Суть его состоит в том, что каждая задача системы получена из данной задачи путем варьирования ее содержания или формы. Под содержанием задачи будем понимать совокупность ее компонентов (условие, требование, базис и способ решения). Варьирование понимается нами очень широко. Это не только изменение, но и замена объектов и/или отношений, добавление и/или изъятие компонентов (условий, требований).

Выделим основные приемы варьирования – прием взаимообратных и противоположных задач, прием обобщения и конкретизации, прием аналогии. Характеристика этих приемов и особенности их использования в обучении математике изложены в [1]. Целью данной статьи является рассмотрение варьирования как метода построения систем задач.

На начальном этапе формирования умений и навыков следует варьировать только внешнюю форму задачи, оставляя постоянным ее содержание. Это дает возможность учащимся сделать самостоятельное обобщение ряда решений других задач и осуществить подготовку качественного скачка достаточными количественными изменениями. На последующих этапах для обеспечения полноты системы задач недостаточно одного лишь варьирования их внешней формы. Необходимо стремиться к разнообразию задач системы, которое призвано поддерживать должную напряженность процесса решения.

Варьирование условия задачи не должно быть произвольным. Когда условие меняется калейдоскопически, учащимся трудно сосредоточить внимание на существенных связях между данными, понять роль варьирующего элемента. В методической литературе выделяют два взаимообратных приема варьирования некоторого элемента условия задачи.

Применение первого предполагает при переходе от одной задачи к другой инвариантность всех их звеньев, кроме одного. Например, при изучении линейной функции учащимся предлагается построить графики функций $\acute{o} = 2\tilde{o} - 3$, $y = 2x$, $\acute{o} = 2\tilde{o} + 7$, $3\acute{o} - 6\tilde{o} = 2$. После выполнения задания учащиеся должны сделать вывод о параллельности прямых, имеющих одинаковый угловой коэффициент.

Второй прием, обратный первому, предполагает, что варьируется то звено внешней формы, уяснение роли которого является целью в настоящий момент. Например, $y=-3$, $y=2x-3$, $y=-2x-3$, $y=0{,}5x-3$, $y=-0{,}5x-3$. Решение данной системы задач позволяет учащимся установить факт зависимости знака углового коэффициента от характера монотонности прямой.

Снятие условий в исходной задаче может привести к постановке неопределенной или вариативной задач.

Неопределённые задачи – задачи с неполным условием, в котором для получения конкретного ответа не хватает одной или нескольких величин или каких-то указаний на свойства объекта или его связи с другими объектами. Решить неопределённую задачу – значит указать множество значений искомой величины. Например, задача «В треугольнике одна сторона имеет длину 5 см, а другая 8 см. Найдите длину третьей стороны» не имеет решения, так как в ней не хватает данных. Какой может быть длина третьей стороны? Неравенство треугольника подскажет ответ: $3<a<13$.

Задачи с параметрами можно рассматривать как частные случаи неопределённых задач.

Неопределенные задачи требуют от ученика мобилизации практически всего набора знаний, умения анализировать условие, строить математическую модель решения, находить данные к задаче «между строк» условия. Использование задач указанного типа поможет преодолению некоторых трудностей, возникающих в процессе поиска решения задачи, подготовки к «открытию» способа решения. С помощью неопределенных задач создается представление о вариативности решения или ответа к задаче, о путях выбора рационального способа решения.

Под *вариативной* будем понимать задачу, у которой формулировка не допускает точного установления взаимного расположения объектов условия или требования.

Решить вариативную задачу – значит рассмотреть все возможные варианты расположения объектов. Например, задача «Найдите сторону параллелограмма, если его другая сторона равна 5 см, а диагональ перпендикулярна стороне и равна 3 см» предполагает два решения в зависимости от того, к какой стороне перпендикулярна диагональ. Такие задачи не выделены в особый класс, поэтому очень часто происходит потеря решений.

Можно получить вариативную задачу, варьируя условие снятием части характеристик или их обобщением.

Исходная задача: «Из пунктов A и B, расстояние между которыми 12 км, навстречу друг другу вышли два пешехода. Скорость одного 2 км/ч, а скорость другого 4 км/ч. Через сколько часов они встретятся?». Если снять условие «навстречу друг другу», то возникает еще одна ситуация – когда пешеходы идут в одном направлении, то есть стандартная задача стала вариативной. Исходная задача: «Три сферы радиуса R касаются одной плоскости и попарно касаются друг друга. Найти радиус четвертой сферы, касающейся трех данных и той же плоскости». Эта задача стандартная и имеет единственное решение: касание может быть только внешним, так как наложено условие касания искомой сферы той же плоскости.

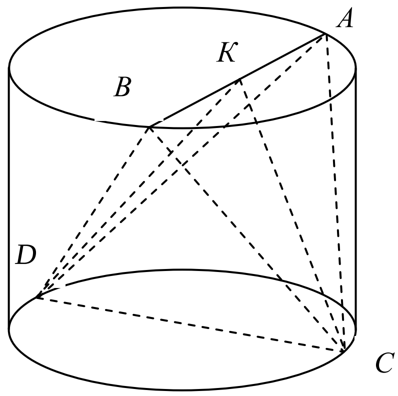
Если же заменить плоскость четвертой сферой (например, такого же радиуса), то получится вариативная задача: искомая пятая сфера может касаться каждой из четырех данных сфер внешним образом; все данные сферы будут лежать внутри искомой сферы.

Стандартные задачи можно получить в обратном порядке – из вариативных задач путем добавления характеристик (объектов) в условие. Например, конкретизируя градусную меру угла α в вариативной задаче: «Найдите площадь сечения куба с ребром b плоскостью, проходящей через середины смежных ребер под углом α к плоскости, определяемой данными ребрами», получим пять различных задачных ситуаций, когда сечением куба плоскостью является треугольник, прямоугольник, трапеция, пятиугольник, шестиугольник.

Если добавлять условия в исходную задачу, то получим *переопределенные задачи*, в которых имеются лишние данные, не нужные для решения, а лишь маскирующие способ решения задачи. Данные в таких задачах могут быть противоречивыми, и выявление этой противоречивости или непротиворечивости является обязательным элементом решения переопределенной задачи. Задачи этого типа требуют от ученика умения анализировать условие, находить в нём нужные данные и отбрасывать ненужные, пичём «ненужными» у разных учеников могут быть разные величины. Например, в задаче «Найдите площадь прямоугольника по стороне, диагонали и углу между диагоналями» одни ученики будут искать ответ половиной произведения диагоналей на синус угла между ними (в этом случае сторона становится лишним данным); другие получат ответ произведением сторон, предварительно вычислив вторую сторону по теореме Пифагора (здесь угол становится лишним данным). Возможен и третий вариант, когда лишним данным станет диагональ.

Рассмотрим задачу: «На окружности основания цилиндра отмечены точки *A* и *B* так, что дуга *AB* равна 60^0. На окружности другого основания отмечены точки *C* и *D* так, что *CD* – диаметр, перпендикулярный прямой *AB*. Найдите объем пирамиды *ABCD*, если объем цилиндра равен 32π, а плоскость *ACD* образует с плоскостью основания цилиндра угол 45^0». $V_{цил} = \pi R^2 H = 32\pi$, то есть $R^2 H = 32$. Отметим точку *K* так, что *AK=BK*. Тогда $V_{ABCD} = 2V_{AKCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{DKC} \cdot AK$.

$S_{DKC} = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot H$, $AK = \frac{R}{2}$. Значит, $V_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot RH \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{3} R^2 H = \frac{32}{3}$.

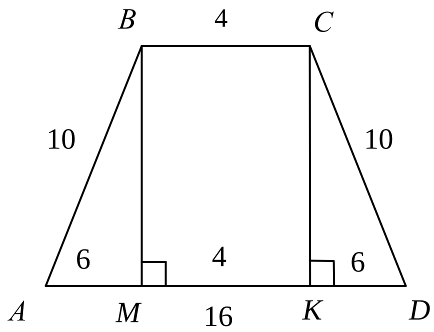


При решении этой задачи мы не использовали угол 45^0. Следовательно, эта задача переопределенная. Если использовать все данные, то решение громоздкое, некрасивое.

Таким образом, переопределенные задачи позволяют учащимся высказать прогноз способа решения, в соответствии с ним выбрать необходимые данные и проверить правильность решения, сравнив ответы.

В результате варьирования условия могут получиться *противоречивые задачи,* содержащие противоречие между данными. Например, следующая задача: «В равнобедренную трапецию *ABCD* можно вписать окружность. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 4 и 16 см, а острый угол при основании равен 30^0» переопределена.

Решим ее, считая, что «острый угол при основании равен 30^0» – лишнее условие. Тогда вписать в трапецию окружность можно лишь при условии, что $AB + CD = AD + BC$.

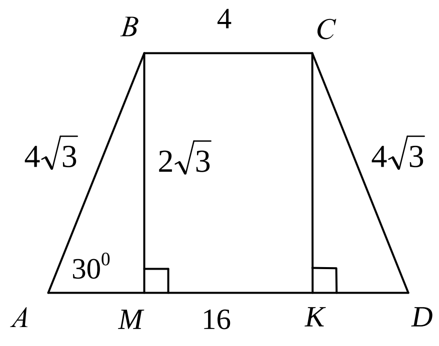


Так как, $AB = CD$, то $2AB = 20$, $AB = 10$.

Из прямоугольного треугольника *ABM* $BM = 8$. А площадь трапеции равна $\frac{16+4}{2} \cdot 8 = 80$. В данном случае имеем противоречие с условием, так как острый угол при основании не равен 30^0.

Решая задачу, считая лишним условием, что «в трапецию можно вписать окружность», получаем: $AM = 6$, $BM = 2\sqrt{3}$, $AB = 4\sqrt{3}$.

Тогда не выполняется условие, что $AB + CD = AD + BC$. Следовательно, в трапецию нельзя вписать окружность.



Если в исходной задаче заменить условие «острый угол при основании равен 30^0» на условие «синус острого угла при основании трапеции равен 0,8», то получим переопределенную задачу.

Рассмотрим пример варьирования требования задачи. Основанием треугольной призмы является правильный треугольник со стороной *a*. Одна из вершин верхнего основания проецируется в центр нижнего. Боковое ребро призмы равно b. Найдите: а) высоту призмы; б) объем призмы; в) площадь боковой поверхности; г) площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной плоскостям оснований и проходящей через вершину верхнего основания; д) площадь сечения призмы плоскостью, перпендикулярной плоскостям оснований и проходящей через сторону нижнего основания.

Решение каждой задачи системы, взятой в отдельности, достаточно трудоемко и требует больших временных затрат. При последовательном решении задач можно воспользоваться результатами, полученными в предыдущих задачах; акцентировать внимание не на вычислении элементов, а на определении их расположения относительно друг друга, на доказательство факта о взаимном расположении.

Варьирование требования может идти по линии минимизации. Предельный случай – задачи, в которых имеются все данные, но нет требования, так называемые *задачи с несформированным требованием*.

Например, исходя из условия задачи «A (1;–2), B (–1;0), C (5;4)», можно составить такие заключения, как «найти угол между прямыми AB и BC»; «найти расстояние между AB и BC»; «найти площадь треугольника ABC»; «найти координаты точки, равноудаленной от A, B и C»; «установить вид треугольника ABC»; «написать уравнение медианы AM» и др.

Если школьник научится подбирать и формулировать вопрос (требование) к задаче, в которой полностью обозначено начальное состояние предмета, он лучше будет продвигаться по этапам ее решения. Прежде чем выдвигать требование, нужно проанализировать данные, связать их между собой, выяснить, какие величины в принципе можно найти при таком условии, а затем уже строить вопрос. Если ученик попытается сформулировать вопрос, не вникая в заданные условия, не составив математическую модель задачи, это может привести к постановке вопроса, разрешить который тяжело из-за громоздкости вычислений при решении или вообще невозможно из-за нехватки данных.

Одно из требований, предъявляемых к формулируемым задачам, – обязательная зависимость ответа от всех исходных данных. Это затрудняет работу по составлению, но приводит к более подробному и скрупулезному изучению связей между элементами задачи. Второе требование – так подобрать вопрос, чтобы не всегда легко находились вычисляемые значения, чтобы вопрос не лежал на поверхности, не был слишком очевиден.

Если ученики затрудняются в выборе интересных вопросов, преподаватель может сам привести несколько вариантов требований, а ученику предложить выбрать и обосновать выбор. Затем уже целесообразно перейти к самостоятельному выдвижению вопросов учащимися, сравнению результатов их работы.

Для задачи с несформированным требованием можно сформулировать несколько вопросов, соподчиненность которых очевидна. Таким образом, происходит конструирование системы задач, имеющих одинаковое условие.

Сформулированная преподавателем система задач имеет важный методический аспект. Она показывает, что должны знать и уметь школьники в результате изучения конкретной темы. Без этого невозможно проектировать методическую систему учителя по изучению данной темы.

Сформулированная учеником система задач является средством диагностики знаний, умений и навыков по изученной теме.

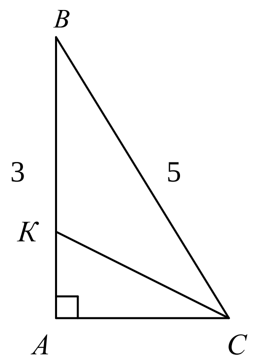
Варьирование базиса и, как следствие, *способа решения* приводит к решению одной задачи разными способами.

Например, решим задачу: «Вычислите $tg(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5})$ » двумя способами:

1. Алгебраический способ. По определению $\arcsin\frac{3}{5}$ – это угол I четверти, синус которого равен $\frac{3}{5}$. Тогда задача заключается в нахождении $tg\frac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{3}{5}$. $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$.

Воспользуемся формулой $tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$. Тогда $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

2. Геометрический способ. Воспользуемся понятиями синуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.



В прямоугольном треугольнике ABC $AB = 3$, $BC = 5$ и CK – биссектриса угла BCA.

Найдем по теореме Пифагора $AC = 4$, а по свойству биссектрисы треугольника $AK = \frac{4}{3}$.

Получаем, что $tg(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}) = \frac{AK}{AC} = \frac{1}{3}$

.

На одну задачу, решаемую разными способами, можно смотреть как на своеобразную систему, удовлетворяющую всем предъявляемым к ней требованиям. Такие системы задач в зависимости от типа или этапа урока, специфики рассматриваемых способов решения позволяют добиться различных целей при правильной организации работы с ними.

Выделим основные цели решения одной задачи разными способами:

− выявление межпредметных связей: алгебра – геометрия, тригонометрия – геометрия и др.;

− обобщение и систематизация полученных знаний, установление взаимосвязей между различными теоретическими фактами;

− выявление сущности определенных методов, их отличительных черт, достоинств и недостатков при применении к конкретным классам задач;

− вооружение учащихся различными методами решения задач с целью обретения ими уверенности в своих силах, возможности в случае затруднения перейти к другому приему решения;

− демонстрация рациональности, эффективности и изящества одних и нерациональности и порою ошибочности других способов;

− показ учащимся одного из приемов самоконтроля.

В соответствии с выделенными целями определяются целесообразность и место данных систем задач в учебном процессе, разрабатывается методика их применения и решения.

Библиографический список

1. Ковалева, Г. И. Теория и методика обучения математике: конструирование систем задач [Текст] / Г. И. Ковалева, Н. А. Астахова, Т. Ю. Дюмина. – Волгоград: Изд-во ВГПУ «Перемена», 2008. – 156 с.

2. Пойа, Дж. Сборник задач по математике Стэнфордского университета: с подсказками и решениями [Текст] / Дж. Пойа, Д. Килпатрик. – М.: НО Научный фонд «Первая иссл. лаб. им. акад. В. А. Мельникова», 2002. – 96 с.