Метод сквозных задач в курсе «Математическое моделирование» для сельскохозяйственных вузов

С. А. Карташова

В статье рассматривается линейное программирование как математический метод. Лучшему усвоению учебного материала способствует исследование сквозных задач. Обработка математической модели проводится компьютерными средствами. Приведен пример использования сиплекс-метода в новых условиях.

Ключевые слова: линейное программирование, симплексный метод, метод сквозных задач, компьютерные средства, математический метод.

Method of Through Problems in the Course of “Mathematical Modeling” for Agricultural Higher Schools

S. A. Kartashova

Linear programming as a mathematical method is considered in this article. Author suggests the “method of through tasks” for best mastering Mathematics. Computer and simplex methods are used.

Key words: linear programming, simplex method, method of through tasks, computer resources, a mathematical method.

Известные педагоги-математики Ю. М. Колягин, Г. И. Саранцев, А. А. Столяр, Г. В. Дорофеев, М. И. Зайкин [1–5] указывают на важную роль в обучении математике специальным образом подобранных совокупностей взаимосвязанных задач. Для реализации профессиональной направленности обучения математике в высшей школе в качестве таких совокупностей взаимосвязанных задач целесообразно взять так называемые *сквозные* задачи, образующие своеобразные цепочки, развивающиеся по сюжетной и прикладной линиям. Последние способствуют достижению необходимой целостности представлений у студентов об эффективности и ценности математического аппарата. В построении таких цепочек определяющую роль играет постепенная модификация содержания задач (Г. В. Дорофеев, М. И. Зайкин, В. И. Крупич [4–6]) и др. Наш преподавательский опыт убеждает в том, что конструирование таких цепочек:

1) позволяет связывать между собой достаточно широкое множество профессионально ориентированных задач с различным «хозяйственным» содержанием;

2) усиливает профессиональную направленность математической подготовки студентов.

Важность обучения построению и анализу математических моделей сегодня, видимо, никем не оспаривается. Методические и дидактические проблемы, связанные с решением прикладных задач и моделированием, изучают многие исследователи: Г. С. Альтшуллер, Б. В. Гнеденко, Н. П. Грицаенко, В. А. Далингер, Ю. М. Колягин, В. М. Монахов, В. А. Поляков, А. Н. Поляков, И. Н. Семенова, Н. А. Терешин, В. В. Фирсов, И. М. Шапиро. Одна из последних монографий на эту тему принадлежит Ю. Б. Мельникову [7].

Как правило, первоначальная задача достаточно проста по своему математическому содержанию. Относительная несложность ее дает возможность преподавателю перебросить мостик между математическими знаниями абитуриентов, пришедшими из средней школы, и потребностями математической подготовки студентов в вузе.

В течение нескольких лет автор читал курс «Математическое моделирование промышленно-экономических процессов и систем» в Чувашской сельскохозяйственной академии. Экономисты, агрономы и зооинженеры как непосредственные руководители и организаторы экономической, агрономической и зоотехнической работы и производственной деятельности в растениеводческих и животноводческих отраслях должны хорошо владеть электронно-вычислительной техникой, современными методами планирования и управления производством, применять их в повседневной практике.

Специалист сегодняшнего дня должен обладать современным экономическим мышлением, навыками управленческой, организаторской и воспитательной работы, активными методами использования электронно-вычислительной техники применительно к профилю своей деятельности. В связи с этим в сельскохозяйственных вузах предусмотрено изучение дисциплины «Математическое моделирование», занимающейся вопросами применения вычислительной техники и экономико-математических методов в сельском хозяйстве.

Этот курс делится на две части: первая часть, называемая «Основы математического программирования», является теоретической базой второй части курса, которая называется «Математическое моделирование промышленно-экономических процессов и систем». Обе части тесно связаны: без изучения первой невозможно строить и решать модели из второй части. При этом первая часть без второй становится слишком отвлеченной и малоинтересной для студентов сельскохозяйственного вуза. Основу первой части составляет линейное программирование, которое исторически развивалось как средство определения путей наиболее эффективного использования имеющихся ограниченных ресурсов. Вместе с тем оно является важным средством получения деловой информации.

Строго говоря, линейное программирование является математическим методом. Уже в своем возникновении оно базировалось на принципах, требующих знания высшей математики. В дальнейшем линейное программирование практически упростилось так, что для обычного его применения требуются математические познания, лишь в небольшой степени превышающие обычный курс алгебры, изучаемый в средней школе. К сожалению, и этих знаний у студентов не хватает. В современных условиях вузы все чаще сталкиваются с проблемой «математической слабости» студентов.

Автор предлагает решение проблемы с использованием особого методического подхода к объяснению материала. Это так называемые *сквозные* задачи, название которых отражает их суть, поскольку они проходят сквозь весь курс линейного программирования [11]. Однажды данное условие задачи практически не меняется на протяжении всего курса. На одной и той же задаче преподаватель показывает применение нескольких методов линейного программирования, за исключением тех случаев, когда необходимо в задаче что-то изменить (в зависимости от выбора метода решения). Исходная сквозная задача изменяется ровно настолько, насколько изменяет ее новый метод.

С одной стороны, студенту не надо привыкать к абсолютно новому условию (как обычно бывает – чтобы объяснить новый метод, берут новую модель), он видит, что надо изменить, чтобы применить другой метод, и полностью концентрирует свое внимание на самом методе, а не на понимании условия. С другой стороны, преподаватель экономит время на объяснении материала, практически сразу приступая к рассмотрению нового метода. Таким образом, преподавание идет от простого к сложному, что помогает студенту понять и запомнить новый метод быстрее.

Компетентный производственник или экономист не будет испытывать особенных трудностей при изучении вопроса о постановке и решении многих проблем линейного программирования. Затруднения могут возникнуть при определении характера задачи и отборе информации, необходимой для ее решения средствами линейного программирования.

Линейное программирование как средство вычислительной техники опирается на математические положения и приемы, обычно незнакомые деловым людям. Эти математические положения и приемы, частично новые по своей концепции, дают возможность обрабатывать факты и данные более эффективно, чем многие примитивные способы «карандаша и бумаги», в то же время обеспечивая лучшее информирование.

Компьютерная техника и мощные эффективные средства связи (в первую очередь Интернет и другие сетевые системы) должны привести к изменению системы приоритетов в образовании. В данный момент задача овладения в процессе обучения вычислительным аппаратом математики до некоторой степени отходит на второй план, центр тяжести необходимо переносить на усвоение навыков эффективного *поиска* и *обработки информации*.

Умение считать и выполнять простейшие арифметические действия является одним из примеров работы с математическими моделями, поэтому можно сказать, что без умения строить хотя бы простейшие математические модели современный образованный человек просто немыслим. Долгое время умение строить и обрабатывать математические модели было невозможно без виртуозного владения вычислительным аппаратом математики. Появление современных компьютеров несколько меняет ситуацию: «центр тяжести» переносится на формирование умений и навыков *построения* математических моделей и *интерпретации* полученных результатов. Обработка математической модели все чаще проводится компьютерными средствами. Современная компьютерная техника в значительной степени снижает потребность во владении и математическим вычислительным аппаратом, так, современные программные средства автоматизируют многие процессы, в том числе и исследовательского характера. Тем важнее умение *строить математические модели*, поскольку, в конечном итоге, с помощью компьютера обычно обрабатывается именно *математическая* модель [7].

Проиллюстрируем методику сквозных задач на конкретных примерах. Замечу, что все эти задачи опробованы на практике и на протяжении 7 лет применяются автором в преподавании математического моделирования студентам 2 и 3 курсов ЧГСХА.

В качестве примера рассмотрим начало преподавания курса «Математическое моделирование в сельском хозяйстве» для студентов экономического факультета ЧГСХА. Первое, с чем приходится знакомить студентов, это графический метод решения задач линейного программирования. Понятно, что для этого невыгодно брать полноценную модель с большим числом переменных. Здесь нам важен сам графический метод, поэтому берем усеченную модель с двумя переменными и тремя ограничениями. Дадим постановку задачи (в дальнейшем, будем называть ее «основной»).

Условие: *Хозяйство занимается возделыванием двух культур (ячменя и овса), располагая следующими ресурсами: пашня – 6000 га, труд – 280000 чел.-часов, возможный объем механизированных работ – 30000 условных га. Цель производства – получение максимума объема валовой продукции (в стоимостном выражении)* [8].

Таблица

Нормы затрат и выхода продукции в хозяйстве

Культуры	Затраты на 1 га посева		Стоимость валовой продукции с 1 га, руб.
	труда, чел.-час.	мех. работ, усл. га	
Ячмень	35	5	420
Овес	55	10	540

Введем переменные x_1 и x_2, обозначающие площади наших культур, соответственно ячменя и овса, и запишем математическую модель (1):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6000 \\ 35x_1 + 55x_2 \le 280000 \\ 5x_1 + 10x_2 \le 30000 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 420x_1 + 540x_2$$

Исследуем ее и дадим полный экономический анализ математических условий.

Вторая тема – простой симплекс-метод решения задач линейного программирования. Здесь снова используем методику сквозных задач. Делаем основную задачу, решенную графическим методом, сквозной, то есть, не изменяя условий задачи, показываем, как решить ее простым симплекс-методом. Студенты условие задачи уже знают, поэтому сосредотачивают свое внимание на самом методе. Для наглядности показываем первую симплекс-таблицу, построенную по той же модели.

Оценки базисных переменных c_i	Базисные переменные опорного плана x_i	Свободные члены уравнений b_i	Свободные переменные и их оценки в целевой функции	
			x_1 (420)	x_2 (1200)
0	x_3	6000	1	1
0	x_4	280000	35	55
0	x_5	30000	5	10
Оценочная строка (Z)	-	0	-420	-540

Следующий этап (третья тема) – это показ метода решения задач линейного программирования с искусственным базисом. Здесь мы первый раз вносим изменение в основную задачу. Если для рассмотрения простого симплекс-метода не пришлось к этому прибегать (достаточно было изменить метод), то в данном случае необходимо это сделать, так как для использования метода требуется наличие в модели хотя бы одного ограничения со знаком $\ge$. Вносим изменения в одно из ограничений. Заменяем условие по механизации работ на условие производства товарной продукции и задаем план производства. Постановка задачи становится следующей:

Хозяйство занимается возделыванием двух культур (ячменя и овса), располагая следующими ресурсами: пашня – 6000 га, труд – 280000 чел.-часов. План по производству продукции –50000 ц. Цель производства – получение максимума объема валовой продукции (в стоимостном выражении).

Таблица

Нормы затрат и выхода продукции в хозяйстве

Культуры	Затраты на 1 га посева труда, чел.-час.	Выход с 1 га, ц	Стоимость валовой продукции с 1 га, руб.
Ячмень	35	22	420
Овес	55	18	540

Получаем условие задачи, подходящее для использования данного метода (2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6000 \\ 35x_1 + 55x_2 \le 280000 \\ 22x_1 + 18x_2 \ge 50000 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 420x_1 + 540x_2$$

Сразу обращаем внимание студентов на то, что до сих пор мы рассматривали с разных позиций одну и ту же задачу, решение которой осуществлялось на основе простейшего алгоритма симплексного метода, поскольку все ограничения имели вид (1). В этом случае дополнительные переменные задачи образуют единичный базис, что чрезвычайно облегчает нахождение первого опорного плана.

Однако в планово-экономических задачах одновременно встречаются различные типы ограничений $(\le, =, \ge)$. В связи с этим каноническая форма записи условий задачи обычно не содержит единичного базиса, поэтому для ее решения используют *метод с искусственным базисом*. Алгоритм решения задачи симплексным методом с искусственным базисом рассмотрим на следующем примере. Особенно важно обратить внимание студентов на 1 этап – переход к системе уравнений. В нашем случае получается следующая система:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6000 \\ 35x_1 + 55x_2 + x_4 = 280000 \\ 22x_1 + 18x_2 - x_5 = 50000 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 420x_1 + 540x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

В этой системе уравнений дополнительная переменная x_5 имеет коэффициент –1, поэтому построить первую симплексную таблицу описанным выше способом невозможно.

Введем в последнее уравнение *искусственную переменную* y_1 с положительным коэффициентом (+ 1) и получим единичный базис. Следует отметить, что искусственная переменная y_1 вводится только для математической формализации задачи, поэтому схема вычислений должна быть такой, чтобы искусственная переменная не могла попасть в окончательное решение в числе базисных переменных. С этой целью для искусственных переменных в целевой функции устанавливают очень низкие цены *M*. Поскольку задача решается на максимум, то в процессе ее решения переменная y_1, имеющая очень низкую (отрицательную) оценку, будет отброшена (при решении задачи на минимум для искусственных переменных в качестве цен следовало бы взять очень большие положительные величины). На практике (особенно при решении задачи на ЭВМ) вместо *M* берут конкретное число, например, –10 000 [9].

После добавления искусственных переменных система примет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6000 \\ 35x_1 + 55x_2 + x_4 = 280000 \\ 22x_1 + 18x_2 - x_5 + y_1 = 50000 \end{cases}$$

$$Z_{\max} = 420x_1 + 540x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - 10000 \cdot y_1$$

Таким образом, полученная система имеет структуру, знакомую студентами, они могут самостоятельно построить первую симплекс-таблицу.

Обращаем внимание студентов на то, как изменилась первая симплекс-таблица (это изменение в третьей строке и добавление нового столбца свободных переменных). Теперь, строим первую симплекс-таблицу:

Оценки базисных переменных c_j	Базисные переменные опорного плана x_j	Свободные члены уравнений b_j	Свободные переменные и их оценки в целевой функции		
			x_1 (420)	x_2 (1200)	x_5 (0)
0	x_3	6000	1	1	0
0	x_4	280000	35	55	0
–10000	y_1	50000	22	18	–1
Оценочная строка (Z)	–	0	–420	–540	0

Далее решение происходит по тому же алгоритму (за исключением подсчета элементов разрешающей строки – показываем студентам новую формулу).

Методические выводы:

– при использовании метода сквозных задач мы затратили минимум времени на подготовку объяснения нового материала (постановку задачи);

– сконцентрировали внимание студентов на новом материале и повторили несколько раз изученный (ведь сам расчет мы не меняли).

Четвертая тема – «Модифицированный симплекс-метод». При решении задач линейного программирования симплексным методом осуществляется упорядоченный переход от одного опорного плана к другому до тех пор, пока либо будет установлена неразрешимость задачи, либо будет найден ее оптимальный план. Для определения того, является ли найденный опорный план оптимальным, на каждой из итераций нужно находить числа в оценочной строке по критерию – либо положительные, либо отрицательные. Это отпадает при решении задачи модифицированным симплекс-методом [8]. Решение рассматриваем снова по основной задаче. Покажем построенные вспомогательную и основную таблицы.

Вспомогательная таблица строится по свободным переменным:

	X1	**X2**
1 ограничение	1	1
2 ограничение	35	55
3 ограничение	22	18
–Z	–420	–540

Основная таблица:

Оценки базисных переменных **c_i**	Базисные переменные опорного плана **x_i**	Свободные члены уравнений **b_i**	Матрица (4☒4)			
0	x_4	6000	1	0	0	0
0	x_5	280000	0	1	0	0
0	x_6	30000	0	0	1	0
Оценочная строка (Z)	–	0	0	0	0	1

Далее решаем задачу по алгоритму модифицированного симплекс-метода. В этой теме мы снова концентрируем внимание студентов не на новом условии, а на самом методе. Сравнивая процессы нахождения решения приведенных выше задач симплексным методом и модифицированным симплексным методом, заключаем, что при использовании последнего метода понадобилось производить меньше вычислений. Это характерно и для нахождения решения других задач линейного программирования, прежде всего таких, для которых число ограничений существенно меньше, нежели число переменных. Таким образом, во многих случаях при выборе метода решения конкретных задач предпочтение отдается модифицированному симплекс-методу. При этом для различных форм этого метода разработаны стандартные программы его использования при решении конкретных задач на ЭВМ. Теперь они могут выбирать и метод тоже [8].

Пятая тема – «Двойственный симплекс-метод». Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в форме основной задачи. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплексным методом эти числа предполагались неотрицательными) [6]. Подход к объяснению метода тот же. Условие задачи не изменяем (решаем основную задачу). Даем объяснение самого метода. Акцентируем внимание студентов на «изюминке» – теперь главное не оценочная строка, а столбец b_i. Решение проводим аналогично простому симплекс-методу (симплекс-таблица одинаковая, поэтому не приводим ее).

Итак, можно сделать некоторые выводы по методике сквозных задач.

Сквозной может стать практически любая задача, это не особый вид задач, который подходит под определенный метод или характеристику. Достаточно в постановку вложить нужные данные, чтобы потом можно было их видоизменять, в зависимости от требований изучаемого метода.

Главное преимущество этого метода – экономия времени на объяснение экономической постановки задачи: не надо писать новое условие и вникать в это условие. Студент концентрирует свое внимание только на самом изучаемом методе и не отвлекается на новые условия в постановке.

Происходит постоянное сравнивание методов, ведь при объяснении нового материала мы сразу повторяем старый, еще раз вспоминая его основные моменты.

Таким образом, происходит качественное познание нового метода, которое дает ответы на вопросы:

– Как пользоваться новым методом?

– В каких случаях его надо использовать?

– К чему он приводит (как меняется результат)?

Примечания

1. Колягин, Ю. М. Учебные математические задачи творческого характера [Текст] / Ю. М. Колягин //

Роль и место задач в обучении математике: сборник статей. – М.: МГУ, 1974. – С. 23–24.

2. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике [Текст] / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.

3. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр [Текст]. – Минск, 1986. – 424 с.

4. Дорофеев, Г. В. О составлении циклов взаимосвязанных задач [Текст] / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34–39.

5. Зайкин, М. И. Многоступенчатые и многоуровневые задачи [Текст] / М. И. Зайкин // Вопросы разноуровневого обучения: Вып. 8: сборник статей. – Арзамас: АГПИ, 2000. – С. 48–52.

6. Крупич, В. И. Теоретические основы обучения решению школьных математических задач [Текст] / В. И. Крупич. – М.: Прометей, 1965. – 166 с.

7. Мельников, Ю. Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей [Текст] / Ю. Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004. – 384 с.

8. Акулич, И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] / И. Л. Акулич. – М.: Высш. шк., 1993. – 336 с.

9. Гатаулин, А. М. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве [Текст] / А. М. Гатаулин. – М.: Агропромиздат, 1990. – 325 с.

10. Виленкин, Н. Метод сквозных задач в школьном курсе математики [Текст] / Н. Виленкин // Повышение эффективности обучения математике в школе / сост. Г. Д. Глейзер. – М.: Просвещение,1989. – С. 101–112.

11. Термин «метод сквозных задач» применительно к школьным задачам был использован Н. Я. Виленкиным и А. Сатволдиевым в статье [10].