

Комплекс логико-ориентированных задач как средство формирования логической грамотности будущих учителей математики

И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева

Предложен путь формирования логической грамотности студентов математических факультетов педвузов в рамках Вводного курса математики с помощью специально разработанных логико-ориентированных задач. Проведена классификация задач по этому курсу. Раскрыты особенности разработанной системы задач. Приведены примеры задач по этому курсу.

Ключевые слова: логическая грамотность, студент педвуза, Вводный курс математики, логико-ориентированная задача, система задач, классификация.

Complex of Logically-Focused Sums as a Means of Formation of Logic Competence of the Future Mathematics Teachers

I. L. Timofeeva, I. E. Sergeeva

The way of developing logical competence of students of mathematical departments of pedagogical universities is offered within the framework of "Propaedeutics of Mathematics" by specially developed logically-directed sums. Classification of sums on this course is offered. The characteristics of the developed system of sums are disclosed. The examples of sums on this course are presented.

Key words: logical competence, a student of pedagogical university, Propaedeutics of Mathematics, a logically-directed sum, a system of the sums, classification.

Логическую грамотность следует формировать у учащихся уже со школы. Однако в действительности формированию логической грамотности не уделяется должного внимания даже в вузе. Как отмечают многие специалисты в области методики преподавания математики и как показывает собственный опыт преподавания на математическом факультете МПГУ, логическая грамотность студентов первого курса – вчерашних школьников – практически не сформирована: студентам недостаточно имеющейся логической подготовки для изучения математики в высшей школе. К тому же результаты исследований, проведенных специалистами в области методики преподавания математики (например, [4]), показывают, что логическая грамотность учащихся школы или вуза не может быть сформирована стихийно в процессе изучения математики. Для этого требуется организация специальной целенаправленной работы, соответствующей уровню образования. Именно такую работу мы и осуществляем со студентами в рамках Вводного курса математики (ВКМ).

Одной из основных целей ВКМ, возрожденного с новым содержанием в 2006/07 уч. году на математическом факультете МПГУ [5], является формирование логической грамотности студентов. Очень важно, чтобы *в начале обучения* в педвузе студенты активно овладевали базовыми логическими знаниями, и прежде всего логическими элементами математического языка и понятиями логического характера.

Под *логической грамотностью* студентов математического факультета педагогического вуза понимаем владение минимумом логических знаний и умений, необходимых им при изучении математических дисциплин и в их будущей педагогической деятельности. Этот минимум логических знаний и умений включает знание логических норм математического языка и соблюдение этих норм, умение корректно использовать логические средства и термины математического языка в соответствии с целями и содержанием речи, а также основные дедуктивные знания и умения.

Считаем, что логическую грамотность студентов первого курса целесообразно формировать с помощью специально разработанных логико-ориентированных задач, которые мы предлагаем в рамках ВКМ.

Как известно, наиболее эффективное усвоение материала возможно только при активном участии школьников. А наибольшую активность они проявляют в процессе решения задач. В связи с этим, решение задач является основой обучения математике.

Ориентируясь на деятельностный подход, обучение в рамках ВКМ мы осуществляем исключительно в форме практических занятий и полностью через примеры и задачи, используя их на каждом этапе обучения.

Каждая задача по ВКМ связана с одним из видов логико-ориентированной работы: 1) над математическими выражениями и предложениями; 2) над математическими определениями; 3) над

математическими теоремами; 4) над математическими доказательствами. Таким образом, получаем разделение задач на четыре класса – *тематическую* классификацию. Для каждого из выделенных классов задач раскроем содержание соответствующей работы.

Логико-ориентированная работа над математическими *выражениями и предложениями* включает в себя распознавание вида выражений и предложений; правильное конструирование выражений и предложений; выявление и анализ логической структуры предложений; корректное использование кванторных слов и логических связок; корректную запись предложений при помощи логических символов; перевод символической записи предложений на естественный язык; преобразование отрицания данного неэлементарного предложения к равносильному ему предложению в позитивной форме.

Логико-ориентированная работа над математическими *определениями* включает логически грамотную формулировку определений; выявление и анализ логической структуры определений; корректную запись определений при помощи логических символов; построение позитивной формы, равносильной отрицанию определяющей части определения.

Логико-ориентированная работа над математическими *теоремами* включает восстановление опущенных кванторов в теореме; переход от безусловной формы теоремы к ее условной форме и наоборот; конструирование для данного предложения обратного, противоположного и контрапозитивного предложений; выявление и анализ логической структуры теорем; формулировку теорем с использованием терминов «необходимо» и «достаточно».

Логико-ориентированная работа над математическими *доказательствами* включает в себя осознанное использование слов «следует» и «логически следует»; выявление и анализ логической структуры элементарного рассуждения; распознавание правильных и неправильных рассуждений; нахождение в рассуждении логической ошибки и объяснение ее сути; выявление пропусков, энтимем в доказательстве и их восполнение; логический анализ готового доказательства или его фрагмента.

Приведем разработанную нами *классификацию* задач по ВКМ, в которой использованы ключевые глаголы при изложении требования задачи, определяющие соответствующие действие или деятельность:

1) задачи на *распознавание* предложений и выражений, необходимых и достаточных условий, правильных и неправильных рассуждений;

2) задачи на *конструирование* предложений и фрагментов доказательств;

3) задачи на *выявление и анализ* логической структуры предложений, определений, теорем, рассуждений, а также на *уточнение* формулировок определений и теорем посредством восстановления опущенных кванторов;

4) задачи на *преобразование* предложений как без изменения логической структуры предложений, так и с ее изменением;

5) задачи на *использование логических символов* для записи предложений, определений, теорем и рассуждений;

6) задачи на *содержательное (неформальное) прочтение* символической записи предложений и рассуждений;

7) задачи на *установление логических отношений* между предложениями (следования, равносильности);

8) задачи на *заполнение пропусков* логического характера в предложении, в частности, в теореме (пропуск, связанный с логическим понятием, логической связкой или квантором), в доказательстве (например, пропуск предложений-попылок, предложений-следствий в элементарном рассуждении).

Перечислим предложенные А. Г. Мордковичем [2] *требования к системе задач*, которые мы учитывали при разработке системы задач по ВКМ: система должна быть *полной* (включать задачи, во-первых, на все основные понятия и методы курса и, во-вторых, в количестве, достаточном для того, чтобы с надежностью обеспечить уровень практических навыков и умений студентов, predeterminedный целями курса); в системе должны содержаться задачи на *формирование* понятий, изучаемых в курсе; часть задач в системе должна иметь выраженную *«школьную» направленность*, проявляющуюся в их содержании.

Раскроем *особенности* разработанной системы задач по ВКМ.

1. Все предлагаемые в курсе задачи являются *логико-ориентированными*.

Логико-ориентированными задачами мы называем задачи, которые акцентируют внимание на логической составляющей математического материала и направлены на формирование логических знаний и умений учащихся, позволяющих повысить эффективность усвоения этого материала.

2. Основная часть задач по ВКМ использует содержание *школьного* курса математики. Благодаря этому реализуется *преemptивность* ВКМ и школьного курса математики. Приведем примеры таких задач.

Задача 1 (конструирование предложений, тема «Логические операции над предложениями»). Для каждого из следующих предложений с действительной переменной x с помощью логических связок постройте равносильное ему предложение без модуля:

$$1) |x| = 5; 2) |x| < 5; 3) |x| \geq 5.$$

Задача 2 (установление логических отношений между предложениями, тема «Преобразование отрицания предложений»). Для каждой пары предложений выясните, равносильно ли второе предложение отрицанию первого:

1) «натуральное число n – простое» и «натуральное число n – составное»;

2) «функция f является четной» и «функция f является нечетной».

При выполнении этой задачи, с одной стороны, повторяются используемые в ней математические понятия, а с другой – отрабатывается логическое понятие «равносильные предложения»: для обоснования того, что одно предложение не является равносильным отрицанию другого, следует привести пример объекта, не обладающего ни одним из фигурирующих в рассматриваемой паре свойством.

Задача 3 (заполнение пропусков, тема «Необходимые и достаточные условия»).

Вставьте вместо многоточия в незаконченное предложение «Для того чтобы $x \in 18$, *достаточно, но не необходимо*, чтобы ...» одно из следующих условий « $x \in 9$ »; « $x \in 2$ и $x \in 9$ »; « $x \in 36$ » так, чтобы получилось верное предложение. Ответ обоснуйте.

Таким образом, в рамках ВКМ осуществляется *повторение* материала школьной математики на более высоком логическом уровне: логико-ориентированное повторение, в процессе которого происходит изучение логических основ математического языка, необходимых для успешного освоения математических дисциплин в вузе. Логические акценты позволяют глубже понять основные определения и теоремы школьной математики и подготовить студентов к изучению высшей математики. Отметим, что такое повторение с логическими акцентами можно организовать при изучении практически каждой темы ВКМ.

3. Многие задачи по ВКМ используют содержание математических дисциплин, изучаемых на

первом курсе математического факультета: математического анализа, алгебры, геометрии. Благодаря этому осуществляются *межпредметные связи* ВКМ с этими дисциплинами. Приведем примеры таких задач.

Задача 4 (преобразование предложений, тема «Условная и безусловная формы теоремы»). Перейдите от безусловной формы теоремы к ее условной форме:

1. *Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена.*

2. *Определитель всякой обратной матрицы отличен от нуля.*

Задача 5 (конструирование предложений, тема «Обратное, противоположное и контрапозитивное предложения»). Для каждого из следующих предложений запишите обратное, противоположное и контрапозитивное ему предложения; из четырех предложений (исходного и трех построенных) выберите пары логически равносильных предложений и укажите, какие из этих четырех предложений являются истинными:

1. *Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.*

2. *Всякая бесконечно большая последовательность неограничена сверху.*

Решение подобных задач позволяет закрепить изученный в рамках других математических дисциплин материал, усвоить его на более высоком логическом уровне, а значит, более осознанно овладеть им. Опыт преподавания подтвердил, что межпредметные связи способствуют повышению эффективности обучения и ВКМ, и другим математическим дисциплинам.

4. Система задач по ВКМ содержит задачи *разного уровня сложности*, что позволяет реализовать индивидуальный подход к учащимся, учитывать дифференцированный подход в обучении и следовать дидактическому принципу «от простого – к сложному».

Приведем задачи трех уровней сложности *математического* характера (А, В, С) на установление отношений между предложениями (тема «Отношение следования»).

Задача 6. Для каждого из двух следующих предложений выясните, является ли оно следствием другого:

(А) $x > 4$ и $x \geq 4$, где x – действительная переменная.

(В) $|x| < 3$ и $x < 3$, где x – действительная переменная.

(С) $x \in \mathbb{M} y$ и $x^2 \in \mathbb{M} y^2$, где x и y – натуральные переменные.

Теперь приведем задачи трех уровней сложности *логического* характера (А, В, С) на преобразование предложений (тема «Преобразование отрицания предложений»). Уровень сложности зависит от сложности логической структуры предложения. В следующих примерах структура предложений $\neg\forall xP(x)$, $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ и $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x) \& R(x))$ соответственно.

Задача 7. Постройте утвердительное предложение, равносильное предложению

(А) «Неверно, что у всякого ромба диагонали равны».

(В) «Неверно, что всякое простое число является нечетным».

(С) «Неверно, что всякий элемент объединения двух различных множеств A и B принадлежит как множеству A , так и множеству B ».

5. Система задач по ВКМ помимо традиционных задач, которые встречаются в других пособиях, например в [1; 3], содержит значительное количество *новых* задач: одни из них хотя и традиционны по требованию, но новы по содержанию (задачи 2, 4, 6); другие отличаются от ранее известных расширением требований (задача 5) или более точной формулировкой (задачи 1, 7); третьи являются новыми по типу (задача 3).

За три года преподавания ВКМ экспериментально подтверждено, что изучение этого курса,

основанное на разработанной нами системе задач, способствует повышению эффективности формирования логической грамотности студентов и обучения математическим дисциплинам в целом.

Библиографический список

1. Михайлов, А. Б. Математический язык в задачах [Текст] : сборник задач / А. Б. Михайлов, А. И. Плоткин, Е. А. Рисс, Е. Ю. Яшина. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2000. – 236 с.
2. Мордкович, А. Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте [Текст] : дис. ... д-ра пед. наук / А. Г. Мордкович. – М., 1986. – 355 с.
3. Моторинский, Ю. А. Вводный курс математики [Текст] : метод. разработка / Ю. А. Моторинский, Б. Д. Пайсон. – Барнаул : Изд-во БГПУ, 2006. – 69 с.
4. Никольская, И. Л. Привитие логической грамотности при обучении математике [Текст] : дис. ... канд. пед. наук / И. Л. Никольская. – М., 1973. – 185 с.
5. Тимофеева, И. Л. О содержании «Вводного курса математики» в Московском педагогическом государственном университете [Текст] / И. Л. Тимофеева, И. Е. Сергеева // Труды V Колмогоровских чтений. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 158–164.