Методика математической подготовки на довузовском этапе

Г. Г. Битнер

В статье излагается опыт и раскрывается методика математической подготовки на довузовском этапе в университете, обеспечивающей качество образования.

Ключевые слова: Центр предвузовской подготовки, допрофессиональный этап, математическая подготовка, методика, классификация, систематизация.

The Technique of Mathematical Education on a Pre-University Stage

G. G. Bitner

Experience and technique of the mathematical education on a pre-university stage at university to provide a quality of education are presented.

Key words: a centre of pre-higher school, on a pre-university stage, mathematical training, the Technique, classification, systematization.

Современная ситуация в области образования характеризуется общим снижением уровня математической подготовки учащихся массовой школы. Это привело, в свою очередь, к снижению уровня подготовки абитуриентов технических вузов. Учитывая данные обстоятельства, изучение основного курса «Высшая математика» целесообразно начинать с изучения вспомогательного раздела «Введение в математику» в Центре предвузовской подготовки (ЦПП), ведущими функциями которого являются систематизация знаний школьного курса и формирование

− осознанного и прочного владения определенным набором знаний, умений и навыков, необходимых для продолжения образования;

− навыков самостоятельного изучения учебной математической литературы;

− понимания единой основы профессионально значимых математических методов;

− представления о математике как особом способе познания мира, общности ее понятий и представлений.

Формирование основ математической культуры учащихся на допрофессиональном этапе особенно актуально, поскольку это направление является начальной и сравнительно новой ступенью непрерывного профессионального образования. Такая дополнительная подготовка закладывает фундамент для продолжения образования по выбранной профессии и для формирования профессиональной культуры будущих инженеров. В связи с этим уже во многих технических вузах созданы ЦПП, в частности, в филиале «Восток» КГТУ им. А. Н. Туполева работает ЦПП и заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ), где обучаются ученики 9–11 классов в течение всего учебного года. В сентябре проводится входное тестирование. Один из вариантов проверочного теста приведен в таблице 1. Учащиеся, показавшие хорошие и отличные результаты, зачисляются в ЗФТШ. Став студентами, они принимают активное участие в олимпиадах, конференциях, выбирают темы курсовых, в последующем – дипломных работ с математическим уклоном, обучаются в аспирантуре. Учащиеся, показавшие удовлетворительные и неудовлетворительные результаты, обучаются в ЦПП. При получении положительных результатов (контрольных и самостоятельных работ) и активно работая в течение учебного года, они могут перейти в ЗФТШ. Работа в ЗФТШ проводится по соответствующей программе при МФТИ.

Для работы в ЦПП составлена программа и написано учебное пособие (Н. М. Иванов, Г. Г. Битнер «Пособие по математике для школьников и поступающих в вузы») с грифом НМС по математике Министерства образования и науки РФ. В пособии представлен учебный курс, направленный на систематизацию, расширение знаний учащихся по математике, формирование математического мышления, выработку практических навыков и подготовку ко вступительным экзаменам в вузы. Пособие содержит необходимый теоретический и справочный материал. Излагаемые темы сопровождаются большим количеством задач с решениями. Кроме того, в пособие включены задачи для самостоятельной работы учащихся, расположенные в порядке возрастания трудности, и тесты. Все задания для самостоятельного решения и тесты сопровождаются ответами. В основу пособия положены лекции и семинарские занятия, проводимые авторами в Центре предвузовской подготовки филиала «Восток» КГТУ им. А. Н. Туполева, где обучаются 9–11 классы. Пособие дополняется электронной версией.

В большинстве случаев школьники любого уровня не готовы к самостоятельной работе; они привыкли работать на запоминание, а не на понимание, поэтому необходимо активизировать их учебно-познавательную деятельность, способствовать усилению мотивации к изучению математики. С этой целью могут использоваться различные способы. Целесообразно использовать постоянно действующий режим консультирования, которое может осуществляться в *индивидуальном* режиме, по мере возникновения вопросов у отдельного учащегося, или с *группой* учащихся.

С учетом состояния математической подготовки учащихся школ и задач формирования основ математической культуры инженера довузовская подготовка будущих абитуриентов должна носить **коррекционно-развивающий характер**. Сначала определяется уровень математической подготовки, цели и группы задач, позволяющих ликвидировать имеющиеся пробелы, систематизировать знания, закрепить и углубить умения и навыки решения задач. С этой целью подбираются вариативные задачи – обычные, поисковые и творческие, которые должны быть интересны, значимы для учащихся, соответствовать уровню притязаний, знаний и развитию каждого учащегося. Такие задачи и задания способствуют повышению умственной и творческой активности школьников и становятся важным условием их психологической подготовки к труду, как умственному, так и физическому. Через развитие этой активности происходит становление важных качеств личности: ответственности за свой труд, умения организовать его, критически осмыслить и оценить. Важно обеспечить представление задач в логической последовательности в зависимости от поставленной цели.

Математическая подготовка школьников чаще всего характеризуется фрагментарностью и является недостаточной для продолжения обучения в вузе. Заученная, но не осмысленная информация быстро забывается; учащиеся теряют интерес к математике. В связи с этим при изучении тем целесообразно проводить классификацию и систематизацию материала с соответствующим подбором задач, тестов, после чего рассматривать нестандартные, творческие задачи. Например, при изучении темы «Показательные уравнения» проводится следующая классификация методов решения:

1. Выравнивание оснований:

$$a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)}\ (a \neq 1, a > 0) \Rightarrow\ f_1(x) = f_2(x).$$

2. Выравнивание показателей:

$$a^{f(x)} = b^{f(x)}\ (a \neq b \neq 1) \Rightarrow\ f(x) = 0.$$

3. Замена с одним видом основания:

$$a^x = t, \quad t > 0\ (a > 0, a \neq 1).$$

4. Замена с двумя видами оснований:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = t, \quad t > 0\ (a > 0, b > 0, a \neq b \neq 1).$$

I. Уравнения первого типа (два слагаемых):

$$2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}.$$

Выравниваем основания:

$$2^{x^2-6x-2,5} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$x^2 - 6x - 2,5 = 4,5$$

или

$$x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow\ x_1 = -1;\ x_2 = 7.$$

II.Уравнения второго типа (два слагаемых):

$$7^x = 3^x$$

или

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x = 1; \quad \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

III. Уравнения третьего типа (три и более слагаемых и один вид оснований):

$$5^x + 5^{3-x} = 30.$$

Перепишем уравнение в виде

$$5^x + \frac{5^3}{5^x} = 30$$

и произведем замену:

$$5^x = t, \quad t > 0.$$

Подставим в последнее уравнение

$$t + \frac{125}{t} = 30 \Rightarrow t^2 - 30t + 125 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 5, \quad t_2 = 25.$$

Возвратимся к замене

$$5^x = 5 \Rightarrow x = 1; \; 5^x = 25 \Rightarrow x = 2.$$

IV. Уравнения четвертого типа (три и более слагаемых, два и более видов оснований):

$$5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0.$$

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{5^{2x}}{5} + 2^{2x} - 5^{2x} + 4 \cdot 2^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения 2^{2x}:

$$\frac{1}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 1 - \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} + 4 = 0.$$

Замена: $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = t, \quad t > 0.$

Подставим в последнее уравнение

$$\frac{1}{5}t + 1 - t + 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{25}{4}.$$

Возвратимся к замене:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} = \frac{25}{4} \Rightarrow x = 1.$$

Отработав навыки классификации и решения уравнений, необходимо для развития логического и творческого мышления постепенно расширять и усложнять класс рассматриваемых уравнений. Далее, например, предложить произвести логический анализ и решение уравнения вида: $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

Проведем логический анализ:

1) в уравнении два слагаемых, следовательно, уравнение первого или второго типа;
2) в уравнении основания не выравниваются, следовательно, уравнение не первого типа;
3) приведем уравнение к виду второго типа, для этого выделим два вида оснований:

$$2^{2x+4} \cdot 3^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x};$$

4) выравниваем показатели: $\frac{2^{2x+4}}{2^{x+8}} = \frac{3^{3x}}{3^{2x+4}}$; $2^{x-4} = 3^{x-4}$;
5) равносильное уравнение $x-4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$.

В завершение следует рассмотреть нестандартные уравнения, которые можно классифицировать только после некоторых преобразований и проявления математической смекалки.

Показательные уравнения связаны с логарифмическими уравнениями. При рассмотрении темы «Логарифмические уравнения» целесообразно произвести сначала классификацию свойств логарифмов, применяемых к соответствующему типу уравнения, а затем классификацию уравнений.

Классификация свойств логарифмов:

$$I, II\begin{cases}1^0.\quad \log_a 1 = 0\,(a > 0, a \neq 1);\\ 2^0.\quad \log_a a = 1\,(a > 0, a \neq 1);\\ 3^0.\quad \log_{10} x = \lg x;\quad \log_e x = \ln x\ \ (x > 0);\\ 4^0.\quad \log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2\ (a > 0, a \neq 1);\\ 5^0.\quad \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2\ (a > 0, a \neq 1);\\ 6^0.\quad \log_a x^k = k\log_a x,\quad \text{где } k - \text{нечетное}\,(a > 0, x > 0, a \neq 1);\\ 7^0.\quad \log_a x^k = k\log_a |x|,\quad \text{где } k - \text{четное}\,(a > 0, a \neq 1);\end{cases}$$

$$III\begin{cases}8^0.\quad \log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}\ (a > 0, x > 0, a \neq 1);\\ 9^0.\quad \log_{a^k} x = \dfrac{1}{k}\log_a x\ (a > 0, x > 0, a \neq 1);\\ 10^0.\ \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}\ (a > 0, b > 0, x > 0, a \neq b \neq 1);\end{cases}$$

$$IV\begin{cases}11^0.\ a^{\log_a x} = x\ (a > 0, x > 0, a \neq 1);\\ 12^0.\ a^{\log_b x} = x^{\log_b a}\ (a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1);\\ 13^0.\ a^{\log^2_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_a x} = x^{\log_a x}\ (a > 0, x > 0, a \neq b \neq 1).\end{cases}$$

Можно предварительно отработать эти свойства на примерах.

Вычислите:

1. $\frac{1}{2}(\log_6 12 + \log_6 3)$; 2. $\log_7 196 - 2\log_7 2$;

3. $10^{\lg 7 + \lg \frac{2}{7}}$; 4. $\log_2 9 - 2\log_2 \frac{1}{3} - 4\log_2 3$;

5. $7^{\frac{2}{\log_2 7}} - 9^{\frac{3}{\log_2 9}}$; 6. $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$.

Далее классифицируем логарифмические уравнения согласно проведенной классификации свойств, при этом следует акцентировать внимание на логике классификации и логике решения. В дальнейшем это пригодится для выбора оптимального решения и для решения творческих задач.

I. Уравнения первого типа (логарифмы с одинаковыми основаниями и в первой степени):

$$\log_a f_1(x) = \log_a f_2(x) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x) \text{при } a > 0,\ a \neq 1,\ f_1(x) > 0,\ f_2(x) > 0.$$

Рассмотрим на примере:

$$\log_{1-x}(2x^2 + x + 1) = 2 .$$

Запишем область допустимых значений уравнения (ОДЗ):

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 0; 1 - x > 0; \\ 1 - x \neq 1. \end{cases} \Rightarrow x < 1; x \neq 0 .$$

Заменим правую часть уравнения через логарифм:

$$\log_{1-x}(2x^2 + x + 1) = \log_{1-x}(1 - x)^2$$

или

$$2x^2 + x + 1 = (1 - x)^2 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = -3 .$$

Корень $x_1 = 0$ не удовлетворяет ОДЗ. Решение уравнения: $x = -3$.

II. Уравнения второго типа (логарифмы с одинаковыми основаниями, но с разными степенями).

Замена: $\log_a x = t\ \ (a > 0, a \neq 1, x > 0)$.

Рассмотрим уравнение: $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

ОДЗ: $x < 0$. Используя свойство 7, и так как при $x < 0 \quad |x| = -x$, получаем $\lg x^2 = 2\lg|x| = 2\lg(-x)$, поэтому данное уравнение можно записать в виде:

$$6\lg(-x) - \lg^2(-x) = 9 .$$

Полагая $\lg(-x) = t$, получим $6t - t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$. Для определения *x* получим простейшее уравнение $\lg(-x) = 3 \Leftrightarrow -x = 10^3 \Rightarrow x = -1000$.

III. Уравнения третьего типа (логарифмы с разными основаниями).

Рассмотрим на примере:

$$\log_{4x+1} 7 + \log_{9x} 7 = 0 .$$

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 4x + 1 > 0; x > 0; \\ 4x + 1 \neq 1; 9x \neq 1. \end{cases} \Rightarrow x > 0; x \neq \frac{1}{9}.$$

Используя свойство 8, исходное уравнение можно записать в виде:

$$\frac{1}{\log_7(4x+1)}+\frac{1}{\log_7(9x)}=0 \Rightarrow \log_7(9x)+\log_7(4x+1)=\log_7 1$$

или

$$9x(4x+1)=1 \Rightarrow 36x^2+9x-1=0 \Rightarrow x_1=-\frac{1}{3}-\text{ посторонний корень;}\quad x_2=\frac{1}{12}.$$

IV. Уравнения четвертого типа (показательно-логарифмические):

$$5^{\lg x}+x^{\lg 5}=50.$$

Ко второму слагаемому уравнения применим свойство 12:

$$5^{\lg x}+5^{\lg x}=50 \Rightarrow 5^{\lg x}=25 \Rightarrow 5^{\lg x}=5^2 \Rightarrow \lg x=2 \Rightarrow x=100.$$

И в завершение рассмотрим уравнения, решаемые методом логарифмирования обеих частей уравнения, то есть когда в основании x, а в показателе логарифм. Можно подобрать разные уравнения такого вида, чтобы обобщить все типы уравнений и все свойства.

Например, уравнение вида: $x^{\lg x}=1000\,x^2$.

ОДЗ: $x>0$. Это уравнение решается методом логарифмирования по основанию 10 обеих частей уравнения. В результате логарифмирования получим уравнение:

$$\lg x^{\lg x}=\lg\left(1000x^2\right) \Leftrightarrow \lg^2 x=\lg 1000+\lg x^2 \Leftrightarrow \lg^2 x-2\lg x-3=0.$$

Полагая $\lg x=t$, получим

$$t^2-2t-3=0 \Rightarrow t_1=3,\quad t_2=-1.$$

Следовательно, $\lg x=3 \Rightarrow x_1=1000$ и $\lg x=-1 \Rightarrow x_2=0{,}1$.

По такой же классификации следует рассмотреть показательные и логарифмические неравенства. Фактически все разделы математики можно организовать по следующей методике:

1. Актуализация опыта математической деятельности школьника (например, решение квадратных уравнений, действия над степенями).

2. Создание нового, то есть фактологической системы ЗУН (классификации показательных и логарифмических уравнений и методика их решения).

3. Развитие умения:

а) логического мышления (логический анализ уравнения и определение его типа);

б) алгоритмического мышления (алгоритм решения соответствующего типа уравнений, алгоритм классификации уравнений).

4. Развитие творческого мышления (решение усложненных и нестандартных уравнений, которые, как правило, имеют несколько вариантов решения).

5. Развитие навыков самостоятельной работы (для закрепления ЗУН и развития умений самостоятельного приобретения знаний предлагаются учебные пособия, домашнее задание, дифференцированное по сложности, тестовые задания).

При таком подходе школьник систематизирует свои знания, развивает математическое мышление: анализ, синтез, сравнение, суждение, умозаключение, понятие. Такая методика формирует вкус к исследованию, способность сосредоточиться, настойчивость, склонность к творчеству, любознательность, удовлетворенность процессом работы и ее результатами. Ученик не приступает сразу к решению задачи. Он сначала анализирует задание, классифицирует, определяет метод решения, осмысливает полученный ответ, что способствует развитию гибкости, активности, целенаправленности, критичности ума. Систематизированное и осмысленное знание закладывается в долговременную память, в результате вырабатываются методы математической деятельности: наблюдение, опыт, применение аналогии, моделирование.

Таблица 1

А1. Частное от деления наименьшего общего кратного чисел 308 и 264 на их наибольший общий делитель равно	1) 21; 2) 12; 3) 6; 4) 42; 5) 84
А2. Выражение $\dfrac{a^{3/2}-4a^{1/2}}{\sqrt{\left(\dfrac{a+4}{2\sqrt{a}}\right)^2-4}}-2a$ после упрощения при $a<4$ примет вид	1) $-4a$; 2) 0; 3) $4a$; 4) 1; 5) –1
А3. Сумма кубов корней уравнения $x^2+5x+5=0$ равна	1) –125; 2) –50; 3) –25; 4) 25; 5) 50
А4. На одном станке партию деталей можно изготовить за 5 часов, а на другом – за 4 часа. Сколько времени нужно для изготовления 90 % деталей этой партии, если включить оба станка?	1) 1,5 часа; 2) 2,1 часа 3) 1,2 часа; 4) 2 часа; 5) 2,2 часа
А5. Сумма координат точки пересечения графиков функций $y=3^{-x}$ и $y=\sqrt{x+10}$ равна	1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5
А6. Наименьший период функции $y=2+5\sin x+\cos\dfrac{x}{3}$ равен	1) $\pi/3$; 2) $2\pi/3$; 3) 3π; 4) 4π; 5) 6π
А7. Произведение корней уравнения $\left(x^2+2x-5\right)\left(x^2+2x+5\right)=24$ равно	1) 5; 2) –5; 3) 7; 4) –7; 5) 14
А8. Корень уравнения $2-\sqrt{2-x}=\sqrt[6]{2x-4}+\sqrt[3]{x+6}$ принадлежит промежутку	1) (–1; 0); 2) [2;3]; 3) (3; 5); 4) [5;6]; 5) (7; 9)
А9. Результат вычисления выражения $tg\,9°-tg\,27°-tg\,63°+tg\,81°$ равен	1) 0; 2) 1; 3) 4; 4) 2; 5) 5
А10. Вычислить $tg\,\alpha$, если $15\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$ и $-\pi<\alpha<-\pi/2$	1) $-2\sqrt{6}$; 2) $2\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{6}$; 4) 1; 5) 2
А11. Среднее арифметическое всех корней уравнения $2\cos x\left(\cos x-\sqrt{8}\,tgx\right)=5$, принадлежащих промежутку $[-\pi;2\pi]$, равно	1) $\pi/2$; 2) $2\pi/3$; 3) $\pi/4$; 4) $\pi/6$; 5) $\pi/3$
А12. Найти $\alpha+\beta$, если вектор $a=(3;-1;\alpha)$ перпендикулярен вектору $b=(2;\beta;1)$, $\lvert b\rvert=3$ и $\beta<0$	1) –10; 2) –4; 3) –2; 4) –1; 5) 0
А13. Если в двух подобных треугольниках длины меньших сторон равны 35 и 21, а разность периметров равна 40, то сумма периметров равна	1) 90; 2) 100; 3) 120; 4) 160; 5) 200
А14. Если сфера проходит через все вершины прямоугольного параллелепипеда с ребрами 2, 3 и 7, то площадь сферы равна	1) 62π; 2) 64π; 3) 66π; 4) 68π; 5) 72π