Наглядное моделирование как средство обучения математике студентов технических вузов

К. Н. Лунгу

В статье рассматривается вопрос организации наглядно-модельного обучения. Наглядное моделирование в обучении математике студентов технических вузов является самым верным, простым и естественным средством организации понимающего усвоения математического материала. Приводятся примеры наиболее эффективного использования специального вида математических моделей в различных разделах математики.

Ключевые слова: модель, моделирование, наглядность, понимающее усвоение.

Evident Modelling as a Means of Training Mathematics of Technical College Students

K. N. Lungu

In the article the question of the organisation of evident-modelling training is considered. The evident modelling in training Mathematics of technical college students is the most true, simple and natural means of the organisation of comprehend mastering in the mathematical material. Are given the examples of the most effective use of a special kind of mathematical models in various parts of Mathematics.

Key words: model, modelling, presentation, comprehend mastering.

1. Проблема повышения качества математических знаний в подготовке инженеров – одна из самых актуальных. От качества знаний, которые получает студент в высшей школе, зависит степень усвоения им специальных дисциплин и возможность ориентироваться в сложных вопросах профессиональной деятельности. Современное состояние науки и практики ставит задачи, требующие поиска и разработки эффективных технологий обучения, обеспечивающих высококачественное математическое образование в условиях дефицита времени и возрастающего объема информации.

Математическая подготовка вносит большой вклад в профессиональную компетентность (интегрированная характеристика качеств личности, имеющая процессуальную направленность и мотивационный аспект, основанная на знаниях, умениях и навыках, которые проявляются в деятельности) будущего инженера ввиду фундаментальной роли математики как науки.

Одним из вариантов реализации личностно-ориентированной системы математического образования в техническом вузе является организация «понимающего усвоения» математики и развитие личности средствами математики на основе концепции наглядно-модельного обучения математике в вузе. Понимающее усвоение предполагает 1) постижение адекватного смысла математического материала; 2) установление существенных связей между математическими объектами; 3) целостность и системность усвоения математического содержания, включая его знаково-символическое представление; 4) направленность процесса обучения на приобретение личностного опыта применения математики в конкретных ситуациях как в учебной, так и в профессиональной деятельности.

Исследования психологов и педагогов показывают, что вербальное описание учебного материала малоэффективно ввиду сложности его последовательной логической организации, которая нуждается в опорных схемах и сигналах. Задача осложняется тем, что переработка информации происходит в одноканальном режиме, то есть осознание человеком собственных умственных действий и управляющего ими логико-психологического механизма затруднено.

Ж. Адамар в исследовании процесса творчества математиков выделяет две группы, одна из которых характеризуется «геометрическим» мышлением, а другая «символьным». Для первой группы характерно создание некоего внутреннего образа, интегрирующего и удерживающего все особенности изучаемого предмета. По мнению А. Д. Александрова, существенным достоинством геометрии является то, что она дает наглядную опору логическому мышлению. Действия с абстрактными понятиями опосредуются действиями с геометрическими, видимыми объектами.

Использование моделирования и наглядности с необходимостью поднимает вопрос о соотношении между ними в обучении. Моделирование и наглядность применяются с единой целью: выделение главного, существенного в изучаемых объектах и предметах. Следует учесть, что только при использовании наглядности существенное выделяется в плане восприятия, а при использовании моделирования оно выделяется в действии, преобразующем объект.

В педагогике и психологии наглядность и моделирование трактуют неоднозначно: как средство обучения и управления познавательной деятельностью, как принцип обучения и как метод обучения. В последнем случае наглядность отождествляется с наблюдением как методом познания.

Если наглядность рассматривать как наблюдение, тогда этот метод возник задолго до трудов Я. А. Коменского (наблюдение описывалось еще в работах философов древности).

Я. А. Коменский «превратил» метод наблюдения в метод обучения, отделив его от других методов. Одним из условий проникновения в тайны науки он считал восприятие, то есть организованное и целенаправленное наблюдение. Восприятие (наблюдение) Коменский рассматривал в качестве источника получения знаний, поскольку он предполагал, что предметы сначала непосредственно фиксируются в сознании и только после ознакомления с ними нужно давать объяснения. Главным правилом обучения он считал не наглядность, а наблюдение, которому поддается все то, что воспринимается органами чувств: зрением, слухом, обонянием, вкусом и осязанием. Согласно учению Ф. Бэкона, автора трактата «Новый Органон», «чувства непогрешимы и составляют источник всякого знания. Наука есть результат опыта и состоит в применении рационального метода к чувственным данным. Индукция, анализ, сравнение, наблюдение, эксперимент суть главные условия рационального метода». Итак, Бэкон считал наблюдение методом познания, который должен сочетаться с методами анализа и сравнения.

Проблема наглядности была исследована и представлена в трудах И. Г. Песталоцци. Он исходил из того, что умственное развитие ребенка вытекает из наблюдения над предметами, которые касаются внешних чувств, и считал необходимым вести обучение наблюдению через выделение исходных элементов (число, форма, слово), организующих это наблюдение. Если для Я. А. Коменского наблюдение (наглядность) служит способом накопления знаний об окружающем мире, то у И. Г. Песталоцци она выступает как средство развития способностей и духовных сил.

Согласно К. Д. Ушинскому, наглядность – «это такое учение, которое строится не на отвлеченных представлениях и словах, а на конкретных образах, непосредственно воспринятых ребенком». Процесс познания, по К. Д. Ушинскому, состоит из двух основных ступеней: 1) чувственного восприятия предметов и явлений внешнего мира; 2) абстрактного мышления.

Сущность наглядного обучения он усматривает в том, чтобы с помощью наглядных пособий или самих реальных предметов содействовать

– образованию четкого и ясного представления о предметах и явлениях;

– выявлению связей между предметами и явлениями;

– образованию определенного обобщения.

Таким образом, решение проблемы наглядности педагогики-классики сводили к ответу на вопрос, происходит ли усвоение знаний в процессе наблюдения (восприятия). К тому же они считали, что свойство наглядности относится только к конкретному, а абстрактные понятия нельзя сделать наглядными.

2. В. В. Афанасьев, Ю. П. Поваренков, Е. И. Смирнов и В. Д. Шадриков утверждают, что «классического понимания наглядности как опоры на чувственный компонент восприятия, актуального разнообразия ее видов недостаточно для реализации процесса обучения математике. Специфика внутренней структуры самих математических объектов и знаково-символической деятельности по их усвоению, усиливающаяся математизация наук (что непременно находит свое отражение в изменяющихся программах вузовского математического образования) требуют нового взгляда на принцип наглядности, более пристального и эффективного использования в его реализации достижений психологии и физиологии человека» [1, с. 209].

Таким образом, современный подход к наглядности в обучении математике в техническом вузе требует применения новых средств: более глубокого, по сравнению с чувственным, рационального уровня отражения, представляющего в чувственно конкретной форме моделирование сущности математических объектов и призванного выступать рычагом управления познавательной деятельностью студентов и средством профессионализации математической подготовки будущего инженера.

Поскольку, по А. Н. Леонтьеву, наглядность – условие **понимания** в обучении, при выборе средств наглядности важно исходить из психологической роли, которую эти средства должны выполнять в усвоении через понимание. В соответствии с этим он выделяет две основные функции наглядности: 1) расширение чувственного опыта; 2) раскрытие сущности изучаемых процессов и явлений.

Более адекватной формулой наглядности является следующая: наглядность – это активность субъекта по созданию образа познаваемого объекта и **ясное понимание** этого образа. Психологический анализ понятия наглядности показывает следующее:

1) наглядность не есть какое-то свойство или качество реальных объектов. Это особенность образов объектов, которые создает человек в процессе познания;

2) наглядность есть показатель простоты и **понятности** для данного человека того психического образа, который он создает в результате его непосредственного или опосредованного познания, поэтому не наглядным может быть образ реально существующего предмета, если он нам непонятен, и наоборот, вполне наглядным может быть образ предмета или явления, не существующего реально, то есть фантастического объекта;

3) наглядность или не наглядность образа, возникающего у человека, зависит в основном от особенностей последнего, от уровня развития его познавательных способностей, интересов, наконец, от его желания создать для себя яркий, понятный образ объекта.

Задачей педагогического процесса обучения математике в техническом вузе является усвоение студентами результатов знаково-символической деятельности, представленных в виде моделей, схем, кодов, символов, заместителей математических объектов.

Оперирование математическими объектами представляет собой преимущественно знаково-символическую деятельность, содержание которой составляет использование и преобразование системы знаково-символических средств. Таким образом, основные трудности и проблемы, возникающие в обучении математике, определяются неумением студента преобразовать информацию, представленную знаково-символическими средствами, в любую другую форму (в виде аналога, образа, системы действий с идеальными объектами, в виде набора связей с другими знаниями, как совокупность зрительных образов, в словесной форме).

Математика имеет дело не с конкретными «пространственными формами и количественными отношениями», а с объектами, представляющими абстрагирование от действительного мира, обобщающими разнообразные реальные и идеальные ситуации. В природе нет пределов, производных, интегралов, рядов и дифференциальных уравнений, а есть процессы, моделируемые этими математическими объектами. Студенты должны изучить именно эти математические объекты как модели реальных процессов и уметь переходить от них к конкретным реальным ситуациям.

Моделированием называют исследование каких-либо явлений, процессов или систем объектов путем построения и изучения их аналогов. Соответственно, эти аналоги называются моделями. Конкретнее, под моделью мы понимаем некий *объект-заменитель*, который в определенных условиях может заменить исследуемый *объект-оригинал*, воспроизведя интересующие нас свойства и характеристики, и обладает такими существенными преимуществами, как наглядность, обозримость, легкость оперирования и т. д.

Большой объем знаний студенты получают при помощи информационных моделей как системный набор величин, содержащих необходимую для решения поставленных задач информацию о моделируемых явлениях. Такие модели позволяют замедлять или ускорять ход времени, сжимать или расширять пространство, выполнять действия, опасные, дорогостоящие или просто невозможные в реальном мире.

Например, при моделировании процессов ускоренных испытаний испытываемый образец представляют в виде специальной динамической системы. Внутренние термодинамические силы, характеризующие процесс в системе, являются причиной переходя системы из одного состояния в другое (из гомогенной система может превратиться в гетерогенную). С позиций ускоренных испытаний нужно выбрать такое внешнее воздействие и такую степень интенсивности, которое вызвало бы наибольшее изменение рабочего процесса в рамках допустимых отклонений, не приводящих к подмене физики и химии рабочего процесса.

Используя высокие температуры как фактор ускорения, можно на разных температурных ступенях получать разные величины скоростей реакций, а это (в соответствии с законом Аррениуса) означает, что интенсивность отказов на каждой температурной ступени равна $\lambda_i = a \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT_i}}$, где к – константа Больцмана, ε – энергия активации.

Эта формула не справедлива в широком диапазоне температур (зависимость как функция от *T* нелинейная), поэтому авторами (К. Н. Лунгу, И. Н. Серогодским [2]) была предложена функциональная модель в виде «суперпозиции двух экспонент» $y = a_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} + a_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}}$.

Таким образом, эта функция с четырьмя неизвестными параметрами была принята в качестве удовлетворительной физической модели для описания процесса ускоренных испытаний.

В зависимости от вида знаково-символической деятельности в обучении математике рассматривают различные типы моделей представления знаний [3]: логические, реляционные, семантические сети, продукционные, фреймовые.

Модели и моделирование используют в трех аспектах:

1. *Моделирование и модель как содержание обучения.* Содержание математики представляет собой педагогическую проекцию науки математики на учебный процесс. Такой вид модели мы используем, например, для замены неразрешимой системы линейных уравнений (число уравнений больше числа переменных) другой системой, получаемой проектированием исходной на пространство большей размерности (равной числу уравнений системы); этот метод (эквивалентный методу «наименьших квадратов») позволяет получить приближенное решение исходной системы, наилучшее в смысле средне-квадратического отклонения.

2. *Моделирование как учебное действие.* Этот аспект моделирования достаточно хорошо изучен в методической литературе (Р. А. Асланов, В. В. Афанасьев, И. И. Баврин, Г. И. Баврин, В. М. Монахов, Е. И. Смирнов и др.), поэтому здесь подчеркнем его важность как метода решения задач. В качестве примера отметим, что этот вид моделирования позволил автору оптимизировать (по объему вычислений и времени исполнения) процесс решения задачи линейного программирования [4], выраженный симплексным методом и реализуемый в одной таблице Гаусса вместо большого числа симплексных таблиц.

3. *Моделирование как учебное средство.* Этот вид моделирования используется во всех темах математики, на разных этапах полного усвоения учебно-познавательной деятельности, в частности на этапах формирования, обобщения и систематизации приемов учебной деятельности [5].

Таким образом, **наглядное моделирование** – это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний [3]. Добавим, что наглядное моделирование верное, простое и лучшее средство организации «понимающего усвоения» математического материала.

При построении моделей того или иного типа необходимо учитывать психофизиологические возможности человека, в частности, его способности, связанные с функциональной асимметрией головного мозга. Критерием эффективности при работе с моделью в обучении должны служить продолжительность и точность выполнения заданий при получении успешного результата.

Роль функциональной асимметрии человеческого мозга состоит в том, что два полушария воспринимают одну и ту же информацию о предмете двумя разными способами и постоянно сравнивает ее между собой. Это обеспечивает внутренний «диалог» между полушариями и позволяет многократно переработать вербальную и образную информацию об изучаемом предмете и преобразовать ее в нужную форму в данный момент.

Когда человеку дается вербальное описание, оно преобразуется в образное за счет внутренней работы мозга, на что затрачивается изрядное количество умственной энергии. Когда же информация дается в готовом виде, мозг активизирует процесс ее обработки, поскольку это происходит не только за счет внутренних ресурсов. В этом состоит естественная деятельность мозга в двухполушарном режиме (А. М. Кущнир).

Наглядность модели объясняется тем, что она чувственно воспринимаема (ее можно видеть, наблюдать в движении, изменении). Студенту важно понять также, что одна модель может служить средством изучения совершенно разных, далеких друг от друга явлений. Например, определенный интеграл может выражать площадь фигуры, путь движения материальной точки, массу материальной линии, количество потребляемой энергии, вероятность события и т. д.

В заключение приведем еще один пример связи моделей далеких друг от друга задач. Комбинаторные модели необходимы для решения задач, в которых проявляются специфические связи и отношения между элементами некоторого множества. Для формирования комбинаторных моделей (для студентов экономических специальностей) мы используем специальные именованные задачи [6]: о расписании (для размещений), о букетах (для сочетаний), о числах (для перестановок), о светофорах или выходе из транспортного средства (для размещений с повторениям) и т. д., в которых комбинаторные множества имеют конкретный смысл, и эти задачи легко могут быть обобщены.

При помощи задачи о букетах легко получить известную формулу Ньютона о разложении натуральной степени бинома $(a+b)^n$. Из определения степени следует, что результат получится умножением m скобок вида $(a+b)$. Поскольку результатом умножения являются комбинации степеней a и b, то нужно знать коэффициенты при $a^m \cdot b^{n-m}$. Для этого нужно брать a из любых m скобок, а b из остальных $(n–m)$ скобок. Очевидно, что это равносильно составлению букета, состоящего из m цветков, взятых из сосуда с n цветками, а число таких сочетаний равно C_n^m, поэтому формула разложения имеет вид:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^m b^{n-m} + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n}$$

Для студентов факультета «Прикладная математика» МГОУ стал удивительным тот факт, что при помощи графика выпуклой (вогнутой) функции можно моделировать теоремы Роля, Лагранжа, Лопиталя, все замечательные пределы и их следствия, а также возможность определения числа π: $\pi = \lim\limits_{n \to \infty} n \cdot \sin \frac{180^0}{n}$ [7]. Тем самым π стало «алгебраическим числом»: согласно Архимеду, π – отношение длины окружности к длине ее диаметра.

Это и другие следствия из анализа свойств выпуклых функций некоторые студенты получают в своих курсовых и дипломных проектах.

Библиографический список

1. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст] / под ред. В. Д. Шадрикова; В. В. Афанасьев, Ю. П. Поваренков, Е. И. Смирнов, В. Д. Шадриков. – М. : Гардарики, 2002.

5. Лунгу, К. Н. О построении модели испытываемого образца и использовании суперпозиции показательных функций при обработке результатов ускоренных испытаний [Текст] / К. Н. Лунгу, И. Н. Серогодский // Теория и практика построения и испытаний технических систем по критериям надежности. – Уфа, 1977. – С. 60–73.

3. Буракова, Г. Ю. Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика [Текст] / Г. Ю. Буракова, А. Ф. Соловьев, Е. И. Смирнов. – Ярославль, 2002.

4. Лунгу, К. Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. Часть 2 [Текст] / К. Н. Лунгу. – М. : Физматлит, 2005.

6. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Часть 2 [Текст] / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – М. : Физматлит, 2006.

7. Лунгу, К. Н. Число π и первый замечательный предел. Длина окружности. Тригонометрические функции [Текст] / К. Н. Лунгу // Новые технологии. – 2007. – № 5. – С. 47–53.