Методические основы обучения студентов решению прикладных задач по теме «Дифференциальные уравнения»

Н. В. Полюхович

В статье раскрыты методические основы обучения студентов решению прикладных задач, способствующие преодолению затруднений, возникающих при выяснении вида дифференциального уравнения первого порядка и при составлении дифференциального уравнения процесса, представленного в условии прикладной задачи.

Ключевые слова: прикладная задача, методическая основа, дифференциальное уравнение, учебное затруднение.

The Methodical Fundamentals of a Student's Training to Solve Applied Problems on the subject "Differential Equation"

N. V. Polukhovich

The article exposes methodical fundamentals of a student's training to solve applied problems, helping to overcome difficulties, which students have while determining the type of a differential equation of the first order and to make a differential equation of the process given in the data of the applied problem.

Key words: an applied problem, methodical fundamental, the differential equation, educational difficulty.

В последнее время изменились требования, предъявляемые к знаниям и умениям специалистов: работник-исполнитель уступает место специалисту, к которому предъявляются повышенные требования. Он должен не только знать свою специальность, но и уметь самостоятельно мыслить, иметь навык исследовательской работы, уметь использовать полученные знания при решении конкретных задач. Все эти качества должны вырабатываться в вузе при изучении естественно-научных и математических дисциплин. Одним из средств формирования таких качеств на занятиях по математике является обучение студентов решению прикладных задач.

Теме исследования прикладных задач посвящено много диссертационных исследований. А. Б. Дмитриевой разработана методика обучения студентов самостоятельному решению прикладных задач и блок задач военно-прикладного содержания по теме «Теория вероятностей» [4]. Р. М. Зайкин, Н. В. Вахрушева и Т. В. Игнатьева предлагают использовать в процессе обучения цепочки взаимосвязанных задач с целью усиления прикладной направленности обучения математике. В работе Р. М. Зайкина [5] охарактеризованы способы составления математических профессионально ориентированных задач юридической тематики и цепочки таких задач. Н. В. Вахрушева [2] выделила две стратегии построения цепочек профессионально ориентированных задач и предложила комплексы цепочек профессионально ориентированных задач экономической тематики. Т. В. Игнатьевой [7] разработаны задачи-компакты прикладной направленности и способы их конструирования. Такие задачи автор предлагает использовать в качестве средства совершенствования обучения математике в техническом вузе. Л. В. Васяк [1] предлагает использовать профессионально ориентированные задачи в качестве средства формирования профессиональной компетентности будущих инженеров. Н. В. Скоробогатовой [15] выявлены критерии отбора и дидактические функции профессионально ориентированных задач в обучении математике будущих инженеров, разработана и обоснована методика отбора и исследования таких задач в обучении математике студентов инженерных специальностей технических вузов с применением технологии наглядного моделирования.

Рассмотрим прикладные задачи в теме «Дифференциальные уравнения». При изучении этой темы студентам нужно усвоить основной материал (научиться определять вид дифференциального уравнения, способы решения уравнений, составлять дифференциальные уравнения при решении прикладных физических, геометрических и экономических задач) и научиться самостоятельно работать с прикладными задачами. Практика показывает, что у студентов возникают затруднения при изучении темы «Дифференциальные уравнения». Первое затруднение связано с определением вида дифференциального уравнения первого порядка. Одной из причин этого затруднения является то, что в учебниках все виды уравнений заданы символьно (общими формулами), словесного описания признаков каждого вида уравнения не приводится, а как известно из психологии, если признаки словесно не сформулированы, то это затрудняет формирование соответствующего умения. Еще одной причиной является отсутствие общей для всех видов дифференциальных уравнений первого порядка «инструкции», следуя которой студенты смогли бы определить вид дифференциального уравнения. Поэтому мы пришли к выводу, что нужно создать методические основы (ориентиры), пользуясь которыми студенты смогли бы определить вид дифференциального уравнения. Эти ориентиры должны иметь обобщенный характер и быть применимы при определении вида любого дифференциального уравнения первого порядка. Реализацией таких методических основ является разработанная нами схема выяснения вида дифференциального уравнения первого порядка (схема 1) [13]. Она основана на следующем: сначала нужно выразить производную, а затем в определенной последовательности действий проанализировать правую часть полученного равенства.

Поскольку существуют дифференциальные уравнения, которые относятся к более чем одному виду (например, уравнение $y' = \frac{y}{x}$ можно считать уравнением с разделяющимися переменными, так как его правую часть можно представить в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной $y' = \frac{1}{x} \cdot y$, а также это уравнение можно считать однородным, так как его правая часть представляет собой функцию, зависящую только от $\frac{y}{x}$), схема 1 определит такие уравнения к видам с наиболее рациональными способами решения (уравнение, приведенное выше, схемой будет определено как уравнение с разделяющимися переменными).

Покажем, как работает схема 1 при определении вида дифференциального уравнения $3x^2 + 6xy^2 + \left(6x^2 y + 4y^3\right) \cdot y' = 0$. Согласно схеме 1, сначала выразим производную $y' = \frac{-3x^2 - 6xy^2}{6x^2 y + 4y^3}$. Далее анализируем правую часть полученного равенства. Представить ее в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной, не удается, поэтому далее пробуем представить ее в виде функции, зависящей только от $\frac{y}{x}$, но и это не удается. Представить правую часть в виде суммы $K(x) \cdot y + B(x) \cdot y^n$, *где* $n \neq 1$, тоже не удалось. Поэтому необходимо проверить выполнимость следующего условия $(\textit{числитель})'_y = -(\textit{знаменатель})'_x$. Вычислим указанные частные производные $(\textit{числитель})'_y = (-3x^2 - 6xy^2)'_y = -12xy$, $(\textit{знаменатель})'_x = (6x^2 y + 4y^3)'_x = 12xy$. Итак, видим, что проверяемое условие выполняется, поэтому делаем вывод, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Созданная схема 1 проверялась двумя способами: через анализ всех видов дифференциальных уравнений первого порядка, представленных в учебниках [3; 8; 9], и через анализ самостоятельной деятельности студентов по определению вида дифференциального уравнения с использованием данной схемы.

Эксперимент показал, что результаты студентов, которых обучали определению вида дифференциального уравнения первого порядка с использованием предложенной схемы, значительно выше результатов студентов, которые обучались традиционно.

Следующее затруднение возникает у студентов при решении прикладных задач, сводящихся к дифференциальному уравнению, и связано с составлением дифференциального уравнения процесса, представленного в условии задачи.

Схема 1. *Определение вида дифференциального уравнения первого порядка*

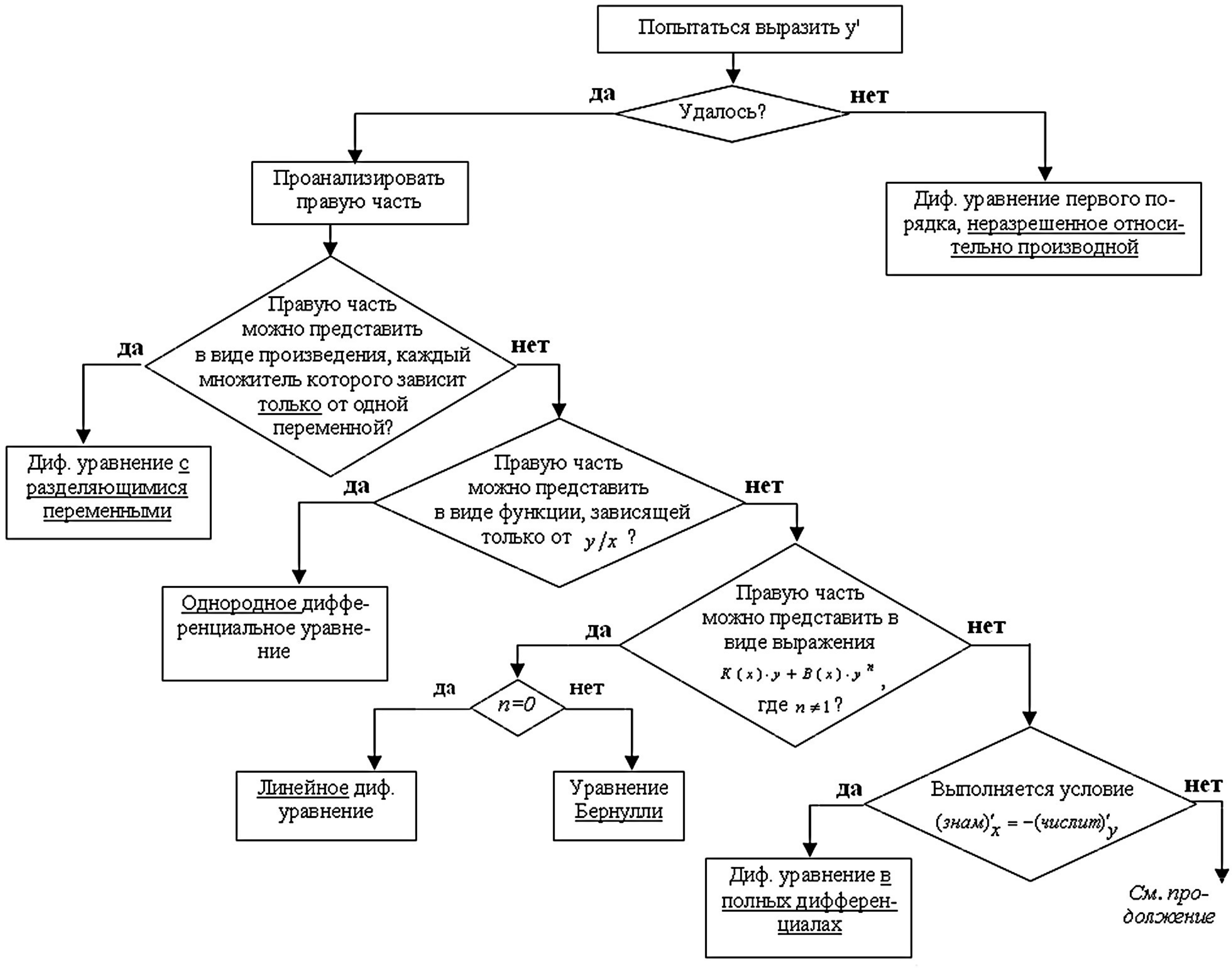
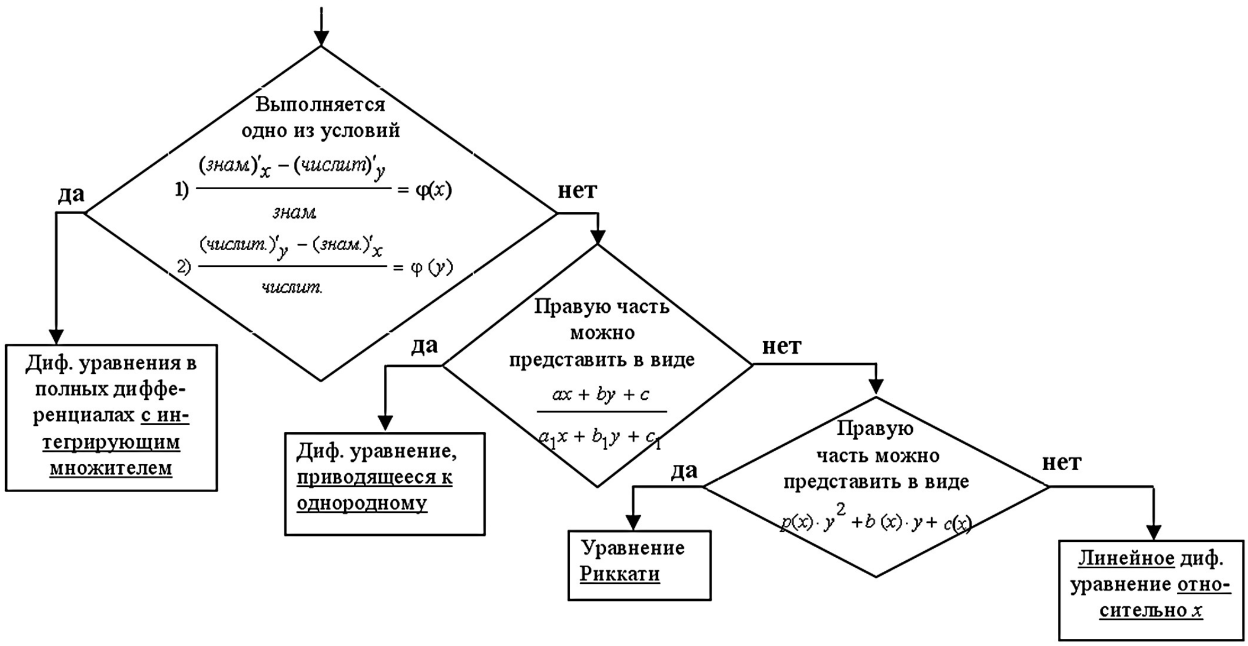


Схема 1 (продолжение)



Причина этого затруднения заключается в том, что в литературе не раскрывается список действий, которые нужно осуществить, чтобы составить дифференциальное уравнение процесса, представленного в условии прикладной задачи.

Мы выяснили, что процесс составления дифференциального уравнения зависит от типа задачи (физическая, геометрическая), каждый из которых имеет свои особенности. Поэтому для прикладных физических и геометрических задач нами сконструированы схемы их решения, где указаны действия, которые необходимо выполнить, чтобы составить дифференциальное уравнение процесса, представленного в условии задачи.

Рассмотрим схему решения прикладных физических задач [10]. Эта схема основана на модельном подходе и включает в себя следующие этапы: 1) составление дифференциального уравнения; 2) работа с дифференциальным уравнением; 3) интерпретация результатов.

Рассмотрим этап составления дифференциального уравнения. Для осуществления этого этапа нужно выполнить следующие промежуточные действия: 1) определить, существует ли физический закон, регулирующий процесс, представленный в условии задачи. Далее последовательность действий зависит от ответа на первый вопрос.

Если ответ **положителен** (такие задачи мы называем прикладными физическими задачами первого вида), то нужно выполнить следующую последовательность действий: 2) записать равенство, соответствующее физическому закону; 3) определить, какая из величин рассматриваемого процесса является независимой переменной; 4) выразить изменяющиеся величины через независимую переменную и данные задачи. Для этого: а) выразить одну изменяющуюся величину из составленного равенства через данные задачи; б) выразить остальные изменяющиеся величины из составленного равенства, используя физический смысл производной.

Если ответ на первый вопрос **отрицателен** (такие задачи мы называем прикладными физическими задачами второго вида), то последовательность действий будет следующей: 2) выбрать величины, одна из которых будет независимой переменной, а другая искомой функцией, и ввести для них обозначения; 3) выразить изменение искомой функции, которое будет соответствовать приращению независимой переменной. Для этого необходимо: а) найти «положительное» приращение искомой функции; б) найти «отрицательное» приращение искомой функции; в) записать «полное» приращение искомой функции.

Реализация второго и третьего этапа схемы решения прикладных физических задач обычно не вызывает затруднений.

Описанные выше этапы легко представить в виде граф-схемы [10].

Практика показала: чтобы студенты успешно самостоятельно решали прикладные физические задачи, нужно еще каждый этап схемы отработать на специально подобранных упражнениях. С этой целью нами созданы комплексы пошаговых упражнений [12] на отработку наиболее сложных этапов решения прикладных физических задач двух видов, а также дидактические материалы к ним [14]. В комплексы пошаговых упражнений включены только задания на отработку действий, необходимых для составления дифференциального уравнения. Дидактические материалы, которые мы предлагаем использовать в процессе обучения студентов решению прикладных задач, можно разделить на два вида: 1) дидактические материалы, используемые во время аудиторных занятий; 2) дидактические материалы для самостоятельной работы студентов дома. Оба вида дидактических материалов сконструированы согласно следующим требованиям: 1) дидактический материал должен быть обучающим (раскрывать состав математической деятельности, помогать преодолевать математические затруднения); 2) дидактический материал должен быть комплексным (учитывать не только математическое содержание, но и организацию работы с ним).

Далее рассмотрим схему решения прикладных геометрических задач, сводящихся к дифференциальному уравнению (схема 2) [11]. Работая над созданием этой схемы, мы обнаружили, что в тексте каждой прикладной геометрической задачи содержится условие, которое можно записать в виде равенства. Далее задачи делятся на два вида. В ряде задач для каждой составляющей этого равенства существует формула, позволяющая выразить искомые составляющие через переменные x, y, y', y'', ….

Пример 1. *Кривая проходит через точку $A(0,a)$, MN – произвольная ордината этой кривой. Определить кривую из условия, что площадь $S_{OAMN} = aL$, где L – длина дуги AM* [8, с. 210]. В данной задаче заданным равенством является $S=aL$; составляющие S и L вычисляются по формулам

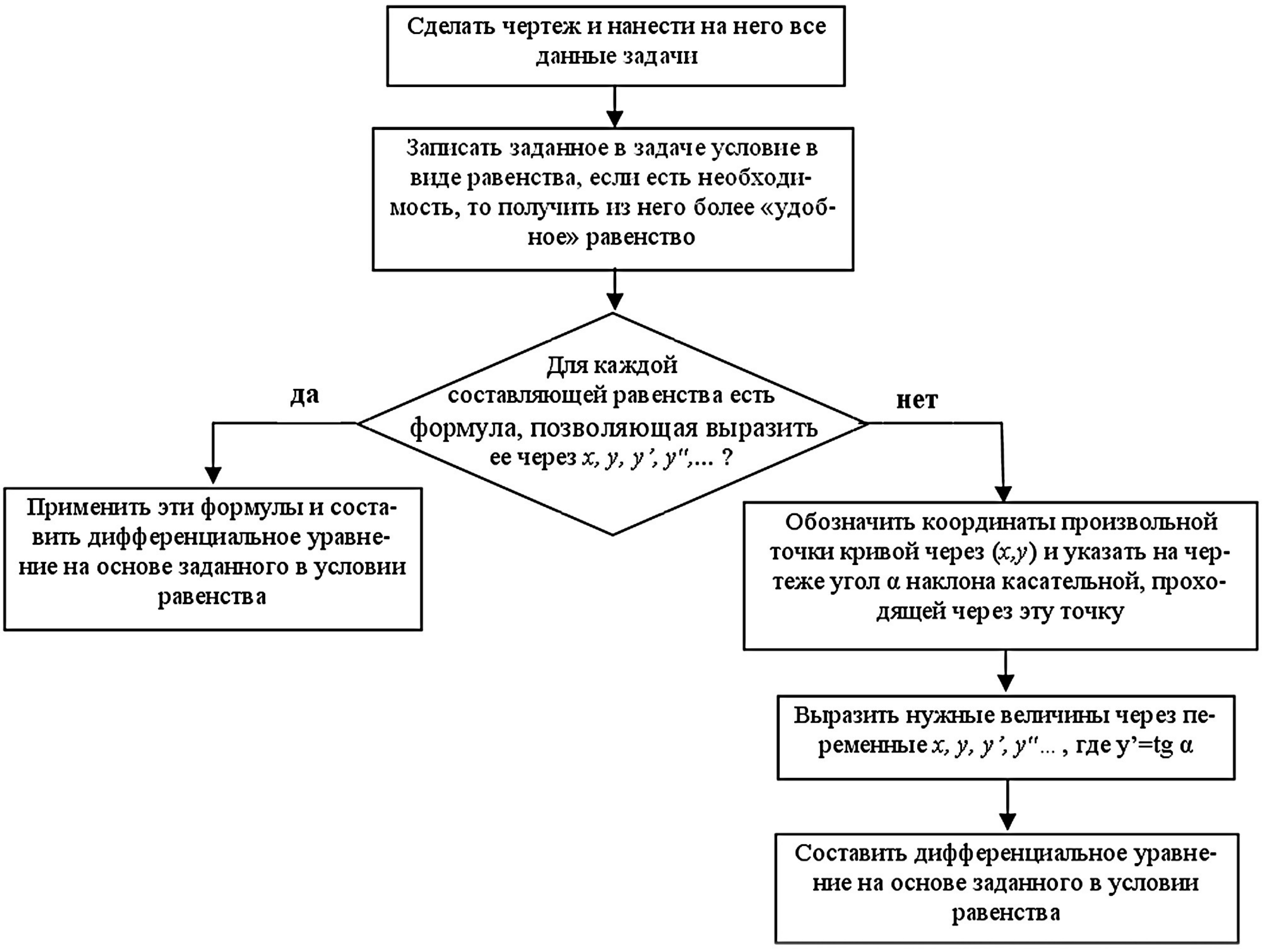
$$S=\int_0^x y\,dx, \quad L=\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx .$$

В других задачах соответствующих формул нет. Пример 2. *Определить кривые, у которых радиус кривизны вдвое больше длины нормали* [8, с.

217]. В этой задаче заданным условием будет: $R_{кр.} = 2MN$. Для радиуса кривизны существует формула $R_{кр.} = \frac{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$, выражающая эту составляющую через *y, y', y''*. Для составляющей *MN* формулы, выражающей ее через *x, y, y, y', y''*... нет. Поэтому для выражения этой составляющей через указанные переменные нужно ввести в рассмотрение координаты *(x, y)* произвольной точки *M* искомой кривой и угол α наклона касательной к кривой, проходящей через эту точку.

В дальнейшем планируем создать методику работы с прикладными экономическими задачами.

Схема 2. *Решение прикладных геометрических задач, сводящихся к дифференциальному уравнению*



Библиографический список

1. Васяк, Л. В. Формирование профессиональной компетентности будущих инженеров в условиях интеграции математики и спецдисциплин средствами профессионально ориентированных задач [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / Л. В. Васяк. – Омск , 2007. – 20 с.

2. Вахрушева, Н. В. Использование цепочек взаимосвязанных задач в реализации профессиональной направленности обучения математике в экономическом вузе [Текст] : дис. … канд. пед. наук / Н. В. Вахрушева. – Орел , 2006. – 156 с.

3. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II. Изд. 2-е. [Текст] : учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – М. : Высшая школа, 1974. – 464 с.

4. Дмитриева, А. Б. Самостоятельная работа по решению прикладных задач в курсе математики как условие повышения качества профессиональной подготовки обучаемых в вузе [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / А. Б. Дмитриева. – М. , 2004. – 18 с.

5. Зайкин, Р. М. Реализация профессиональной направленности математической подготовки на юридических факультетах [Текст] : автореф. дис. … канд.

пед. наук / Р. М. Зайкин. – Нижний Новгород, 2004. – 18 с.

6. Зайниев, Р. М. Задачи и упражнения по математике с практическим содержанием [Текст] : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям и специальностям техники и технологии / Р. М. Зайниев. – Набережные Челны : Изд-во Камской гос. инж.-экон. акад. , 2008. – 80 с.

7. Игнатьева, Т. В. Конструирование задач-компактов прикладной направленности и их использование в качестве средства совершенствования обучения математике в технических вузах [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / Т. В. Игнатьева. – Нижний Новгород, 2009. – 21 с.

8. Минорский, В. П. Сборник задач по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для втузов / В. П. Минорский. – 14-е изд. , испр. – М. : Изд-во физико-математической литературы, 2004. – 336 с.

9. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2 [Текст] : учеб. пособие для втузов / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.

10. Полюхович, Н. В. Схема решения прикладных физических задач с использованием обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Н. В. Полюхович // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 10: Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров : Изд-во ВятГГУ, 2008. – 356 с.

11. Полюхович, Н. В. Схема решения геометрических задач на составление дифференциальных уравнений [Текст] / Н. В. Полюхович // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации : материалы Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 115-летию чл. корр. АПН СССР П. А. Ларичева. – Вологда : Русь, 2007. – 414 с.

12. Полюхович, Н. В. Обучение решению прикладных физических задач по теме «Дифференциальные уравнения» [Текст] / Н. В. Полюхович // Образование в техническом вузе в XXI веке: Международный межвузовский научно-методический сборник / ГОУ ВПО «Камская государственная инженерно-экономическая академия». – Вып. 3. – Набережные Челны : Изд-во Кам. гос. инж. -экон. акад. , 2008. – 142 с.

13. Полюхович, Н. В. Схема выяснения вида дифференциального уравнения первого порядка [Текст] / Н. В. Полюхович // Преподавание математики в вузах и школах: проблемы содержания, технологии и методики: материалы Второй региональной научно-практической конференции. – Глазов : Изд-во Глазов. гос. пед. ин-та, 2006. – 128 с.

14. Полюхович, Н. В. Дидактический материал как основа обучения прикладным задачам по теме «Дифференциальные уравнения» [Текст] / Н. В. Полюхович // Проблемы математического образования : материалы Международной научно-методической конференции. – Черкассы : Изд-во ЧНУ им. Б. Хмельницкого, 2009. – 290 с.

15. Скоробогатова, Н. В. Наглядное моделирование профессионально ориентированных задач в обучении математике студентов инженерных направлений технических вузов [Текст] : автореф. дис. … канд. пед. наук / Н. В. Скоробогатова. – М. , 2007. – 23 с.