10. *Лебедев, А.В.* Максимумы наследуемых признаков частиц в ветвящихся процессах [Текст] // Труды V Колмогоровских чтений. – Ярославль. Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 62–66.
11. *Бокс, Дж., Дженкинс, Г.* Анализ временных рядов [Текст]. – М.: Мир, 1974.
12. *Лидбеттер, М., Линдгрен, Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов [Текст]. – М.: Мир, 1989.
13. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст]. – Т.2. – М.: Мир, 1984.
14. *Сенета, Е.* Правильно меняющиеся функции. [Текст]. – М.: Наука, 1985.
15. *Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosh T.* Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, 1997.
16. *Esary J., Prochan F., Walkup D.* Association of random variables with applications // Ann. Math. Stat. 1967. V. 38. N 5. P. 1466–1474.
17. *Булинский, А.В., Шашкин, А.П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. [Текст]. – М.: Физматлит, 2008.
18. *Rammal R., Toulose G., Virasoro M.A.* Ultrametricity for physicists // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 765–788.

ОТОЗВАНА/RETRACTED 15/07/2020 г.

А.В. Лебедев

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ РАЗМЕРОВ КЛАСТЕРОВ ПРЕВЫШЕНИЙ В РЕКУРРЕНТНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ С ЛОГ-ЛАПЛАСОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе изучаются лог-лапласовские распределения случайных процессов с кластерами превышений степенного хвоста. Получены все характеристики в явном виде. Кластеры наблюдаются в виде вертикально вытянутых групп точек (выбросов).

Ключевые слова: компьютерное моделирование, рекуррентные последовательности, лог-лапласовские коэффициенты, кластеры превышений.

A.V. Lebedev

ABOUT DISTRIBUTION OF THE SIZES EXCESS CLUSTERS IN RECURRENT SEQUENCES WITH LOG-MECHANICAL FACTORS

In the article is studied a broad log-mechanical distribution of casual processes with excess clusters of a sedate tail. All characteristics are received in an explicit form. Clusters are observed in the form of vertically extended groups of points (emissions).

Keywords: computer modelling, recurrent sequences, log-mechanical factors, excess clusters.

Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ N 07-01-00077, N 07-01-00373

1. Введение. Рассмотрим процесс Y_n, $n \geq 1$, удовлетворяющий стохастическому рекуррентному уравнению

$$Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1, \quad Y_0 \geq 0, \tag{12}$$

где (A_n, B_n), $n \geq 1$, — независимые одинаково распределенные пары неотрицательных случайных величин.

Такие процессы и поведение экстремумов в них изучались автором в [1, 2] для случаев, когда коэффициенты A_n принимают значения в интервале $(0,1)$. Однако в предположении, что они могут принимать значения как меньшие, так и большие единицы, ситуация оказывается качественно иной. Такие модели давно известны; они исследовались, например, в [3].

Далее, как и в работах [4, 5] мы рассмотрим случай, когда коэффициенты A_n имеют лог-лапласовское распределение [6] вида:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\, x^{\alpha}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\, x^{-\beta}, & x \geq 1 \end{cases}, \quad 0 < \alpha < \beta. \tag{13}$$

Известно, что у процесса вида (12) при довольно общих условиях стационарное распределение имеет степенной хвост (показатель которого обозначим κ), и превышения высокого уровня происходят не по одиночке, а образуют кластеры случайного размера. Вероятность появления кластера размера k обозначим через π_k, $k \geq 1$. Величина, обратная среднему размеру кластера, называется экстремальным индексом θ. Если экстремальный индекс стационарной случайной последовательности $\theta > 0$, то ее максимум M_n растет асимптотически как максимум θn независимых случайных величин с тем же распределением [3], [7, §8.1].

Величину θ называют также первым экстремальным индексом: $\theta_1 = \theta$. Вводятся и последующие экстремальные индексы θ_k, $k \geq 2$, определяющие распределение размеров кластера:

$$\pi_k = \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{\theta}, \quad k \geq 1.$$

В работе [3] для этих величин приведены общие формулы, но ни в общем случае, ни в рассмотренном там частном (применительно к ARCH-процессам) они не дают ответа в явном виде, и результат может быть получен только приближенно (методом Монте-Карло). В лог-лапласовском случае оказывается возможным получить все характеристики в явном виде, и это единственный известный автору пример такого рода. Заметим, что распределение величин B_n и их возможная зависимость от A_n не играют роли при довольно общих условиях (теорема A [5]), которые в дальнейшем мы будем считать заведомо выполненным.

В [4] найдены показатели $\kappa = \beta - \alpha$ (теорема 3) и $\theta = (1 - \alpha/\beta)^2$ (теорема 4). Там же обсуждались возможные приложения модели в финансовой математике и эконометрике.

Отметим также, что вопрос о структуре кластеров достаточно просто решается для ARMA-процессов с тяжелыми хвостами [7, §5.5]. Однако для более сложных процессов аналитические результаты единичны. Например, в [8] изучались экстремумы и кластеры превышений обобщенных процессов максимум-авторегрессии первого порядка. Размеры кластеров в этом случае оказываются распределены геометрически.

2. Основные результаты. С помощью теоремы A в [4] было показано, что если A_n распределены по закону (13), то $\kappa = \beta - \alpha$.

Согласно [3], допустимо представление

$$\theta = 1 - \mathbf{M}e^{\kappa \min\{T_1,0\}}, \quad \theta_k = \mathbf{M}e^{\kappa \min\{T_{k-1},0\}} - \mathbf{M}e^{\kappa \min\{T_k,0\}}, \tag{14}$$

где через T_k, $k \geq 1$, обозначены k-е максимумы (т.е. первое, второе, третье наибольшое по величине значение и т.д.) в последовательности сумм $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$, $Z_i = \ln A_i$. Величины Z_i имеют асимметричное лапласовское распределение

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\, e^{\alpha x}, & x < 0 \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\, e^{-\beta x}, & x \geq 0 \end{cases}. \tag{15}$$

Поскольку при $\alpha < \beta$ верно $\mathbf{M}Z_1 < 0$, то $S_n \to -\infty$, $n \to \infty$, почти наверное, и все T_k определены. Таким образом, задача сводится к изучению их распределений.

В работе [5] была доказана следующая лемма.

Лемма 1. *Все T_k, $k \geq 1$, имеют распределения*

$$G_k(x) = \begin{cases} (1-h_k)\, e^{\alpha_k x}, & x < 0 \\ 1 - h_k\, e^{-(\beta-\alpha)x}, & x \geq 0 \end{cases}, \tag{16}$$

где $\alpha_k = (\beta-\alpha)h_k/(1-h_k)$ и h_k, $k \geq 1$, удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$h_k = \rho\left(1 - \frac{(1-h_{k-1})^2}{1-\rho h_{k-1}}\right), \quad h_0 = 1; \quad \rho = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{17}$$

Заметим, что лемма 1 имеет и самостоятельное теоретическое значение (как утверждение о свойствах k-х максимумов последовательности сумм случайных величин, имеющих асимметричное лапласовское распределение).

Теорема 1. *Для вероятностей π_k, $k \geq 1$, верны формулы:*

$$\pi_k = \frac{2g_k^2 - (g_{k-1}^2 + g_{k+1}^2)}{(1-\rho)^2}, \quad g_k = 1 - h_k. \tag{18}$$

Доказательство. По лемме 1 имеем

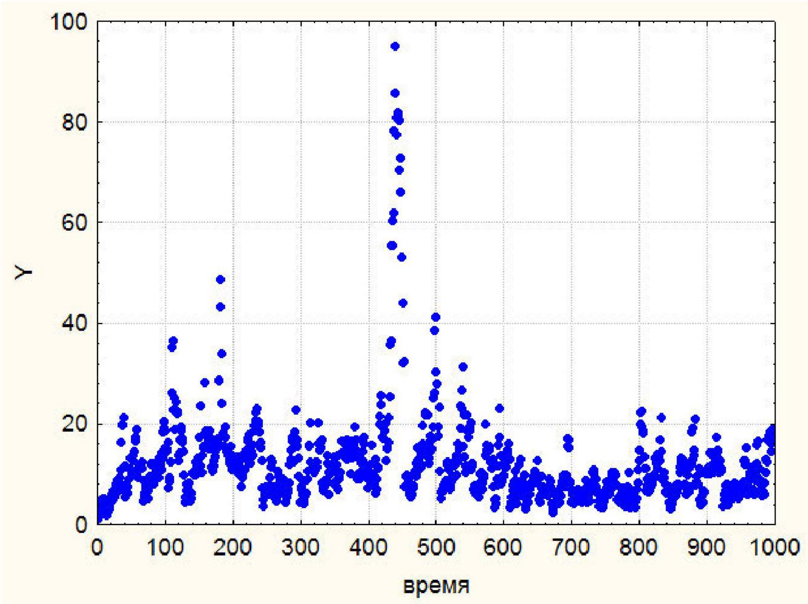
$$\mathbf{M}e^{\kappa \min\{T_k,0\}} = \int_{-\infty}^0 e^{\kappa u} dG_k(u) + h_k = \frac{(1-h_k)\alpha_k}{\kappa + \alpha_k} + h_k = (2-h_k)h_k = 1 - g_k^2,$$

откуда в силу (14) получаем $\theta = g_1^2 = (1-\rho)^2$ и $\theta_k = g_k^2 - g_{k-1}^2$. Поскольку $\pi_k = (\theta_k - \theta_{k+1})/\theta$, отсюда следует утверждение теоремы.

Таким образом, с помощью формул (17) и (18) можно рассчитать вероятность π_k для любого $k \geq 1$. Например, при $\rho = 1/2$ получаем следующую таблицу (для $k \leq 10$):

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
π_k	0,222	0,204	0,151	0,111	0,081	0,059	0,044	0,033	0,024	0,018

В нашем примере средний размер кластера $\mu = 1/\theta = 1/(1-\rho)^2 = 4$.



Было проведено компьютерное моделирование процесса Y_n с параметрами $\alpha = 4$, $\beta = 8$. На рисунке представлен его график за время $T = 1000$. Кластеры наблюдаются в виде вертикально вытянутых групп точек (выбросов).

Замечание. Из (17) следует, что $h_k \to 0$, причем $h_k \sim \rho(2-\rho)h_{k-1}$. Таким образом, величины h_k и, как следствие, вероятности π_k, убывают асимптотически в геометрической прогрессии (что в примере видно по таблице).

Полученные результаты были кратко изложены в [9].

Автор благодарен М.В.Болдину, Ю.Н.Тюрину, В.Н.Тутубалину, В.П.Одинцу и Е.И. Смирнову за внимание к работе.

Библиографический список

1. Лебедев, А.В. Максимумы рекуррентных случайных последовательностей [Текст] // Вестник МГУ. Сер.1. Матем. Мех. - 2001. - No 1. - С. 10-14.
2. Лебедев, А.В. Максимумы рекуррентных случайных последовательностей. Случай тяжелых хвостов [Текст] // Вестник МГУ. Сер.1. Матем. Мех. - 2001. - No 3. - С. 63-66.
3. de Haan L., Resnick S.I., Rootzen H., de Vries G.C. Extremal behaviour of solutions to a stochastic difference equation with applications to ARCH processes. // Stoch. Proc. Appl. 1989. V. 32. N 1. P. 213–224.
4. Новицкая, О.С., Яцало, Е.Б. Экстремумы рекуррентных случайных последовательностей [Текст] // Вестник МГУ. Сер.1. Матем. Мех. - 2008. - No 5. - С. 6-10.
5. Лебедев, А.В. Тяжелые хвосты и кластеры превышений в рекуррентных последовательностях с лог-лапласовскими коэффициентами // Ярославский педагогический вестник. Сер. "Естественные науки". 2009. - No 1. С.7-10.
6. Kozubowski T.J., Podgórski K. Log-Laplace distributions // Int. Math. J. 2003. V. 3. N 4. P. 467–495.

7. Embrechts P., Klüppelberg C.P., Mikosh T. Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.
8. Alpuim M.T., Catkan N.A., Hüsler J. Extremes and clustering of nonstationary max-AR(1) sequences // Stoch. Proc. Appl. 1995. V. 56. N 1. P. 174–184.
9. Лебедев, А.В. Степенные хвосты и кластеры в линейных рекуррентных случайных последовательностях [Текст] // Труды VI Колмогоровских чтений. - Ярославль, 2008. - С. 132-136.

Е.И. Смирнов

ХАУСДОРФОВЫ СПЕКТРЫ И ПУЧКИ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

В настоящей статье рассматриваются обобщения подготовительной теоремы Вейерштрасса и глобальной теоремы Вейерштрасса о делении для ростков голоморфных функций в точке n-мерного комплексного пространства. Автор формулирует глобальную теорему о делении в терминах существования и непрерывности линейного оператора.

Ключевые слова: глобальная теорема Вейерштрасса о делении, теорема о замкнутом графике, ростки голоморфных функций, Н-пространства.

E.I. Smirnov

HAUSDORFF SPECTRA AND SHEAVES OF LOCALLY CONVEX SPACES

In the present article generalisation of the preparatory theorem by Vejershtrass and the global theorem by Vejershtrass about division for sprouts of holomorphic functions in a point of n-dimensional complex space are considered. The author formulates the global theorem about division in terms of existence and a continuity of the linear operator.

Keywords: The global theorem by Vejershtrass about division, the theorem of the closed schedule, sprouts of holomorphic functions, H-space.

Let $\{\mathcal{S}_U, \rho_{UV}\}$ be a presheaf of abelian groups over a topological space $\mathcal{D}$, Ω a nonempty partially ordered set and $\mathfrak{F}$ an admissible class for Ω (we may assume without loss of generality that $\Omega = |\mathfrak{F}|$). Let us denote by $\hat{H}(\mathcal{S})$ a covariant functor from $\operatorname{Ord}\Omega$ to $\operatorname{Ord}\mathcal{U}$, where $\mathcal{U}$ is a base of open sets in $\mathcal{D}$, and by $\check{H}(\mathcal{S})$ a contravariant functor from $\operatorname{Ord}\mathcal{U}$ to the category of abelian groups so that an abelian group $\mathcal{S}_U$ is defined for each $U \in \mathcal{U}$ and a homomorphism $\rho_{UV} : \mathcal{S}_U \to \mathcal{S}_V$ is defined for each pair $U \subset V$. Then $H = \check{H}(\mathcal{S}) \circ \hat{H}(\mathcal{S})$ is a contravariant functor of the Hausdorff spectrum $\mathcal{X}(\mathcal{S}) = \{\mathcal{S}_{U_s}, \mathfrak{F}, \rho_{U_{s'}U_s}\}$, which we will call the *Hausdorff spectrum associated with the presheaf* $\{\mathcal{S}_U, \rho_{UV}\}$. Let X be the H-limit of the Hausdorff spectrum $\mathcal{X}(\mathcal{S})$ in the category of abelian groups and let

$$A = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \bigcup_{s \in |F|} U_s .$$