which is impossible.

Therefore

$$\begin{array}{rcl} ||P||_A & = & \sup_A |p(z)| \\ & \leq & \overline{\lim}_{m\to\infty} \sup_{\mathcal{D}_m} |p(z)| = \overline{\lim}_{m\to\infty} \sup_{\mathcal{D}_m} |p_{a'}(z)| \\ & \leq & \frac{K\cdot M\cdot k}{2\pi}\, \overline{\lim}_{m\to\infty} l(\Gamma^m_{a'}) \cdot \overline{\lim}_{m\to\infty} \sup_{\overline{\mathcal{D}}_m} |f(z)| \\ & \leq & K_A \cdot l_A \cdot \sup_A |f(z)| = K_A \cdot l_A \cdot ||F||_A \,. \end{array}$$

Thus the operator $L_2 : (\mathcal{O}_A, p) \to (\mathcal{O}_A, p)$ is continuous. The theorem is proved. □

References

1. *Gunning, R.C.R., Rossi, H.* Analytic functions of several complex variables (Russian). – Moscow, Mir (1969) (transl. from English edition: Prentice Hall 1965).
2. *Schaefer, H.H.* Topological vector spaces (Russian). – Moscow, Mir 1971 (transl. from English edition: New York, Macmillan 1966; New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag 1971).
3. *Smirnov, E.I.* Hausdorff spectra in functional analysis. – Springer-Verlag, London, 2002. – 209 p.
4. *Smirnov, E.I.* On the Hausdorff limit of locally convex spaces (Russian). Editorial Board of the Sibirsk. Mat. Z. Novosibirsk 1986. – Dep. VINITI, 25. 12. 86, 2507-B.

Ю.В. Бондаренко

СИЛЬНОЕ УСЛОВИЕ ШОКЕ ДЛЯ КОНУСОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ

В настоящей статье приведены некоторые теоремы о представлении конусов в пространстве функций на (0;?). Эти конструкции навеяны, с одной стороны , классической теоремой Каратеодори-Минковского о представлении элементов конуса через крайние точки , а с другой стороны, - конструкциями из работ, посвященных операторному представлению конусов убывающих и вогнутых функций в весовом пространстве.

Ключевые слова: конус в пространстве функций, крайние лучи, весовые пространства, конуса убывающих и вогнутых функций.

Ju.V.Bondarenko

STRONG CONDITION SHOKE FOR CONES IN SPACE OF FUNCTIONS

Some theorems about representation of cones in function spaces on (0;?) are considered. We use the classical Karatheodory – Minkowski theorem about representation of cone elements by extremal points and operator representation of cones of monotone and concave functions in weight spaces.

Key words: cones in function spaces, extremal points, weight spaces, cones of monotone and concave functions.

В настоящей статье приведены некоторые теоремы о представлении конусов в пространстве функций на $(0;+\infty)$. Эти конструкции навеяны, с одной стороны, классической теоремой Каратеодори-Минковского о представлении элементов конуса через крайние точки, а с другой стороны, – конструкциями из работ, посвященных операторному представлению конусов убывающих и вогнутых функций в весовом пространстве $L^p(w)$ и построениями из работ [2, 5, 6, 7].

Сначала сформулируем классическую теорему Минковского.

Теорема 1. *Пусть X – компактное выпуклое подмножество конечномерного векторного пространства E и x – элемент из X. Тогда x есть конечная выпуклая комбинация крайних точек X, т.е. для каждого x существуют крайние точки $x_1, x_2, ..., x_k$ и неотрицательные числа $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ такие, что выполнены соотношения*

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1, \quad x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i. \tag{1}$$

Позднее Каратеодори усилил теорему Минковского в конечномерном случае, связав число крайних точек в представлении (1) с размерностью исходного пространства. Приведем теорему Каратеодори [3].

Теорема 2. *Пусть X – компактное выпуклое подмножество n-мерного векторного пространства E и x – элемент из X. Тогда x есть конечная выпуклая комбинация не более чем $n+1$ крайней точки X.*

Пример симплекса в R^n показывает, что число $n+1$ уменьшить нельзя.

Бесконечномерный аналог теоремы Минковского известен как теорема Крейна-Мильмана, которая в современном виде выглядит так.

Теорема 3. *Пусть E – локально выпуклое пространство. Тогда каждая точка компактного выпуклого подмножества $X \subseteq E$ есть центр тяжести вероятностной меры на X, сосредоточенной на замыкании крайних точек X.*

Классическая эквивалентная формулировка теоремы 3, не содержащая понятия центра тяжести вероятностной меры, имеет вид.

Теорема 3'. *Если X – компактное выпуклое подмножество локально выпуклое пространства E, то X совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек.*

Сейчас мы приведем один из наиболее известных примеров применения теоремы Крейна-Мильмана.

Напомним [4], что вещественная функция на интервале $(0,\infty)$ называется вполне монотонной, если она бесконечно дифференцируема и для ее производных $f^{(0)}(t)$, $f^{(1)}(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$,... выполняются соотношения: для каждого $n \in N$ и для всех $t > 0$ выполняются неравенства $(-1)^n f^{(n)}(t) \geq 0$.

Примерами вполне монотонных функций являются функции $f(t) = x^{-\alpha}$, $g(t) = e^{-\alpha x}$, $(\alpha \geq 0)$.

Очевидно, что множество вполне монотонных функций, удовлетворяющих условию $\overline{\lim}_{t\to+0} f(t) < \infty$, образует конус, который мы обозначим через $K(B)$. Как показано в [4], крайние лучи конуса $K(B)$ будут порождены функциями $f(x) = e^{-\alpha x}$, $(\alpha \geq 0)$.

Следующая теорема о представлении принадлежит С.Н. Бернштейну [4].

Обозначим через $[0,\infty]$ одноточечную компактификацию полуинтервала $[0,\infty)$.

Теорема 4. *Если функция f вполне монотонна на $(0,\infty)$, то существует единственная борелевская мера μ на $[0,\infty]$, такая, что для любого $x>0$ справедливо равенство*

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\mu(\alpha).$$

Г. Шоке нашел широкое обобщение теоремы Крейна-Мильмана. Следующая теорема является ее обобщением.

Теорема 5. *Предположим, что X – метризуемое компактное выпуклое множество локально выпуклого пространства E и $x_0\in X$. Тогда существует вероятностная мера μ на X, представляющая x_0 и сосредоточенная на крайних точках X.*

Исходя из формулировок теорем 1-5, имеют смысл следующие определения.

Основная задача, которая будет рассмотрена в этом параграфе, имеет следующий вид. Пусть K некоторый конус в пространстве функций на $(0,\infty)$.

Определение 6. *Пусть задан конус K. Будем говорить, что конус K обладает сильным условием Шоке, если для каждой $f\in K$ найдется своя последовательность функций $\{x_i\in ex(K)\}_{-\infty}^{\infty}$, такая, что выполнены следующие соотношения:*

существует константа $c>0$, не зависящая от $f\in K$, такая, что для всех $t\in(0,\infty)$ выполнено неравенство

$$c^{-1}f(t)\le\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i x_i(t)\le cf(t), \tag{2}$$

существует константа $c(p)>0$, не зависящая от $f\in K$, такая, что для всех $p\in[1,\infty)$ выполнены неравенства

$$c^{-1}(p)\|f|L^p\|\le(\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_i|^p\|x_i|L^p\|^p)^{1/p}\le c(p)\|f|L^p\|. \tag{3}$$

Напомним, что весом называется положительная измеримая функция $w:R_+\to R_+$, а норма в весовом пространстве Лебега L^p_w определяется с помощью формулы

$$\|f|L^p_w\|=(\int_0^\infty|f(t)|^p w^p(t)dt)^{1/p},\qquad \|f|L^\infty_w\|=ess\sup_{0<t<\infty}w(t)|f(t)|.$$

Определение 7. *Пусть задан конус K. Будем говорить, что конус K обладает сильным условием Шоке с весом, если для каждой $f\in K$ найдется своя последовательность функций $\{x_i\in ex(K)\}_{-\infty}^{\infty}$, такая, что выполнены следующие соотношения:*

существует константа $c>0$, не зависящая от $f\in K$, такая, что для всех $t\in(0,\infty)$ выполнено неравенство

$$c^{-1}f(t)\le\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha_i x_i(t)\le cf(t), \tag{4}$$

существует константа $c(p)>0$, не зависящая от $f\in K$, такая, что для всех $p\in[1,\infty)$ и для любого веса w выполнены неравенства

$$c^{-1}(p)\|f|L^p_w\|\le(\sum_{-\infty}^{\infty}|\alpha_i|^p\|x_i|L^p_w\|^p)^{1/p}\le c(p)\|f|L^p_w\|. \tag{5}$$

Конечно, если конус удовлетворяет сильному условию Шоке с весом, то он удовлетворяет сильному условию Шоке. Ниже мы покажем, что обратное утверждение неверно.

Определения 6-7 сформулированы для всех элементов конуса, хотя в различных задачах анализа требуется выполнение условий не на всем конусе, а на некотором его подмножестве. Поэтому имеют смысл следующие модификации определений 6-7.

Определение 6'. *Пусть задан конус K. Будем говорить, что подмножество M_0 конуса K обладает сильным условием Шоке, если для каждой $f \in M_0$ найдется своя последовательность функций $\{x_i \in ex(K)\}_{-\infty}^{\infty}$, такая, что выполнены следующие соотношения:*

существует константа $c > 0$, не зависящая от $f \in M_0$, такая, что для всех $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство

$$c^{-1} f(t) \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i x_i(t) \leq c f(t), \tag{6}$$

существует константа $c(p) > 0$, не зависящая от $f \in M_0$, такая, что для всех $p \in [1, \infty)$ выполнены неравенства

$$c^{-1}(p) \|f|L^p\| \leq (\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^p \|x_i|L^p\|^p)^{1/p} \leq c(p) \|f|L^p\|. \tag{7}$$

Определение 7'. *Пусть задан конус K. Будем говорить, что подмножество M_0 конуса K обладает сильным условием Шоке с весом, если для каждой $f \in M_0$ найдется своя последовательность функций $\{x_i \in ex(K)\}_{-\infty}^{\infty}$, такая, что выполнены следующие соотношения:*

существует константа $c > 0$, не зависящая от $f \in M_0$, такая, что для всех $t \in (0, \infty)$ выполнено неравенство

$$c^{-1} f(t) \leq \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_i x_i(t) \leq c f(t), \tag{8}$$

существует константа $c(p) > 0$, не зависящая от $f \in M_0$, такая, что для всех $p \in [1, \infty)$ и для любого веса w выполнены неравенства

$$c^{-1}(p) \|f|L^p_w\| \leq (\sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha_i|^p \|x_i|L^p_w\|^p)^{1/p} \leq c(p) \|f|L^p_w\|. \tag{9}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Зафиксируем последовательность множеств $D = \{D_i\}_{i=1}^{\infty}$. Для определенности мы будем считать, что эти множества принадлежат R_+.

По набору множеств $D = \{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ построим конус $K(D)$, элементами которого будут функции вида $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi(D_i)$, где числовая последовательность $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ является неотрицательной.

Лемма 8. *Пусть для системы множеств* $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ *выполнено условие: для каждого* $j \in N$ *для любого подмножества* $J \subseteq N$ *выполнено соотношение*

$$\chi(D_j) \neq \sum_{i \in J} \chi(D_i). \tag{10}$$

Тогда все крайние лучи конуса $K(D)$ *порождены функциями* $x_i = \chi(D_i)$.

Доказательство этой леммы очевидно.

Лемма 9. *Пусть для системы множеств* $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ *для любого* $i \in N$ *выполнено условие*

$$D_i \backslash (\cup_{j \neq i} D_j) \neq \emptyset. \tag{11}$$

Зафиксируем две функции

$$f_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{0,i} \chi(D_i), \qquad f_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} d_{1,i} \chi(D_i)$$

Если для некоторой константы $c > 0$ *при всех* $t \in \cup_{j=1}^{\infty} D_j$ *выполнены неравенства*

$$c < \frac{f_0(t)}{f_1(t)} < c^{-1}, \tag{12}$$

(здесь мы считаем, что $\frac{0}{0} = 1$*),*

то при каждом $i \in N$ *выполнено неравенство*

$$c < \frac{d_{0,i}}{d_{1,i}} < c^{-1}. \tag{13}$$

Доказательство. Зафиксируем $i \in N$ и выберем теперь точку $t_i \in D_i \backslash (\bigcup_{j \neq i} D_j)$. Тогда из (11) следует, что справедливы равенства

$$f_0(t_i) = d_{0,i}, \qquad f_1(t_i) = d_{1,i}.$$

Поэтому из (12) следует (13).

Лемма доказана.

Теперь мы готовы привести пример конуса, удовлетворяющего сильному весовому условию Шоке.

Теорема 10. *Пусть система множеств* $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ *является дизъюнктной, т.е.* $D_i \cap D_j = \emptyset$ *для* $i \neq j$. *Тогда конус* $K(D)$ *удовлетворяет сильному весовому условию Шоке.*

Доказательство. Сразу же отметим, что из дизъюнктности системы множеств $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ следует, что эта система удовлетворяет условию (11) и поэтому для конуса $K(D)$ выполнено утверждение леммы 8.

Поскольку система множеств $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ дизъюнктна, то крайние лучи конуса $K(D)$ порождены функциями $\chi(D_i)$.

Итак, зафиксируем функцию $f \in K(D)$. Пусть построена функция $\widehat{f}(t)$, для которой выполнены условия:

$$\widehat{f}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \chi(D_i);$$

$$c < \frac{f(t)}{\widehat{f}(t)} < c^{-1}. \tag{14}$$

Покажем, что выполнены неравенства

$$c^{-1}\|f|L_w^p\| \leq (\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i\chi(D_i)|L_w^p\|^p)^{1/p} \leq c\|f|L_w^p\|. \tag{15}$$

Во-первых, из дизъюнктности системы множеств $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ следует равенство

$$\|\widehat{f}|L_w^p\| = (\sum_{i=1}^{\infty}\|b_i\chi(D_i)|L_w^p\|^p)^{1/p}. \tag{16}$$

Во-вторых, из соотношения (14) следует неравенство

$$c^{-1}\|\widehat{f}|L_w^p\| \leq \|f|L_w^p\| \leq \|\widehat{f}|L_w^p\|. \tag{17}$$

Из соотношений (16) и (17) следует (15).

Теорема доказана.

Приведем теперь пример конуса $K(D)$, который не обладает сильным условие Шоке с весом.

Теорема 11. *Пусть система множеств $\{D_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (10) и для любого $n \in N$ выполнено условие*

$$mes(\cap_{i=1}^{n} D_i) > d > 0.$$

Тогда конус $K(D)$ не удовлетворяет сильному весовому условию Шоке.

Доказательство. Для каждого $n \in N$ выберем подмножество $U_n \subseteq \cap_{i=1}^{n} D_i$ так, чтобы выполнялось условие

$$mes(U_n) = \min\{d, 1\} \tag{18}$$

и положим

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^p} = c_p(n), \tag{19}$$

$$w_n(t) = a\begin{cases} 1, & \text{если } t \in U_n, \\ v_n(t), & \text{если } t \notin U_n, \end{cases}$$

где положительная функция v_0 удовлетворяет соотношению

$$\int_{R_+\setminus U_n} v_0^p(t)dt \leq mes(U_n). \tag{20}$$

Определим функцию $f_n \in K(D)$ равенством

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\chi(D_i).$$

Пусть построена функция $\widehat{f}(t)$, для которой выполнены условия:

$$\widehat{f}(t)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i\chi(D_i); \qquad c<\frac{f(t)}{\widehat{f}(t)}<c^{-1}. \tag{21}$$

Тогда из леммы 9 следует, что при всех $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства

$$c<\frac{b_i}{i^{-1}}<c^{-1}. \tag{22}$$

Тогда

$$\|\widehat{f}|L^p_{w_n}\|=(\int_{R_+}|\sum_{i=1}^{n} b_i\chi(D_i)|^p w_n^p(t)dt)^{1/p}=$$

$$(\int_{U_n}|\sum_{i=1}^{n} b_i\chi(D_i)|^p w_n^p(t)dt+\int_{R_+\setminus U_n}|\sum_{i=1}^{n} b_i\chi(D_i)|^p w_n^p(t)dt)^{1/p}=$$

$$(mes(U_n)|\sum_{i=1}^{n} b_i|^p+\int_{R_+\setminus U_n}|\sum_{i=1}^{n} b_i\chi(D_i)|^p w_n^p(t)dt)^{1/p}. \tag{23}$$

Поэтому из (21 - 23) следуют неравенства

$$c(mes(U_n)C^p(n))^{1/p}\le\|\widehat{f}|L^p_{w_n}\|\le$$

$$c^{-1}(mes(U_n)C^p(n)+C^p(n)\int_{R_+\setminus U_n} v_n^p(t)dt)^{1/p}\le$$

$$c^{-1}(2mes(U_n)C^p(n))^{1/p},$$

или

$$cC(n)(mes(U_n))^{1/p}\le\|\widehat{f}|L^p_{w_n}\|\le c^{-1}2^{1/p}C(n)(mes(U_n)^{1/p}. \tag{24}$$

С другой стороны, выполняется соотношение

$$(\sum_{i=1}^{n}\|c_i\chi(D_i)|L^p_w\|^p)^{1/p}=(\sum_{i=1}^{n} c_i^p\int_{D_i} w_n^p(t)dt)^{1/p}=$$

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i^p(\int_{U_n} w_n^p(t)dt+\int_{D_i\setminus U_n} w_n^p(t)dt))^{1/p}=$$

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i^p(mes(U_n)+\int_{D_i\setminus U_n} w_n^p(t)dt))^{1/p}.$$

Поэтому

$$c(mes(U_n)^{1/p}C_p(n)\le$$

$$(\sum_{i=1}^{n}\|c_i\chi(D_i)|L^p_w\|^p)^{1/p}\le c^{-1}2^{1/p}C_p(n)(mes(U_n)^{1/p}. \tag{25}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} C(n) = \infty,$$

а при $p > 1$ выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty} C_p(n) < \infty,$$

то из (24) и (25) следует, что сильного условия Шоке с весом не может быть.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бережной, Е.И.* О представимости некоторых конусов в L^p_v и экстраполяции операторов на конусах [Текст] / Е.И. Бережной, Л. Малигранда// Доклады РАН. Сер. математика. – 2006. – Т. 406. – С. 1-4.
2. *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение [Текст] / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980.
3. *Бренстед, А.* Введение в теорию выпуклых многогранников [Текст] / А. Бренстед. – М.: Мир, 1988.
4. *Фелпс, Р.* Лекции о теоремах Шоке [Текст] / Р. Фелпс. – М.: Мир, 1968.
5. *Sawyer, E.T.* Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces // Studia Math., 1990. – V. 96. – P. 145-158.
6. *Heinig, H., Maligranda, L.* Weighted inequalities for monotone and concave functions // Studia Math., 1995. – V. 116. – P. 133-165.
7. *Gol'dman, M.L., Heinig, H.P., Stepanov, V.D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Can. J. Math., 1996. – V. 48. – N 5. – P. 959-979.

М.А. Башкин

ЧЕТНО-ОДНОРОДНЫЕ НЕРАСЩЕПИМЫЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ С РЕТРАКТОМ $\mathbf{CP}^{1|4}_{k+1k31}$ ПРИ $k \geq 3$

В статье содержится классификация четно-однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой, ретракт которых определяется голоморфным векторным расслоением с сигнатурой $\mathbf{CP}^{1|4}_{k+1k31}$ при $k \geq 3$.

*Ключевые слова:*четно-однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, голоморфное векторное расслоение, сигнатура, голоморфное векторное поле.