

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C(n) = \infty,$$

а при $p > 1$ выполняется неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_p(n) < \infty,$$

то из (24) и (25) следует, что сильного условия Шоке с весом не может быть.

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бережной, Е.И.* О представимости некоторых конусов в L_v^p и экстраполяции операторов на конусах [Текст] / Е.И. Бережной, Л. Малигранда // Доклады РАН. Сер. математика. – 2006. – Т. 406. – С. 1-4.
2. *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение [Текст] / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980.
3. *Бренстед, А.* Введение в теорию выпуклых многогранников [Текст] / А. Бренстед. – М.: Мир, 1988.
4. *Фелпс, Р.* Лекции о теоремах Шоке [Текст] / Р. Фелпс. – М.: Мир, 1968.
5. *Sawyer, E.T.* Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces // *Studia Math.*, 1990. – V. 96. – P. 145-158.
6. *Heinig, H., Maligranda, L.* Weighted inequalities for monotone and concave functions // *Studia Math.*, 1995. – V. 116. – P. 133-165.
7. *Gol'dman, M.L., Heinig, H.P., Stepanov, V.D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // *Can. J. Math.*, 1996. – V. 48. – N 5. – P. 959-979.

М.А. Башкин

ЧЕТНО-ОДНОРОДНЫЕ НЕРАСЩЕПИМЫЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЯ С РЕТРАКТОМ $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ ПРИ $k \geq 3$

В статье содержится классификация четно-однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой, ретракт которых определяется голоморфным векторным расслоением с сигнатурой $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ при $k \geq 3$.

Ключевые слова: четно-однородное нерасщепимое супермногообразие, ретракт, голоморфное векторное расслоение, сигнатура, голоморфное векторное поле.

EVEN-HOMOGENEOUS NON-SPLIT TORUS SUPERVARIETIES WITH RETRACT AT $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ AT $k \geq 3$

This paper contain the classification of non-split even-homogeneous supermanifolds over the complex projective line whose retract corresponds to a holomorphic vector bundle of the signature, where $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ at $k \geq 3$.

Key words: even-homogeneous non-split supermanifold, sretract, holomorphic vector bundle, signature, holomorphic vector field.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 07-01-00230.

Как известно, любое голоморфное расслоение над $\mathbf{CP}^1$ единственным образом разлагается в прямую сумму расслоений на прямые. Обозначим через $\mathbf{L}_k$ голоморфное расслоение на прямые степени k . Пусть $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{CP}^1$ голоморфное векторное расслоение ранга 4, представленное в виде $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-(k+1)} \oplus \mathbf{L}_{-k} \oplus \mathbf{L}_{-3} \oplus \mathbf{L}_{-1}$, где $k \geq 3$. Обозначим через $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением $\mathbf{E}$.

Покроем $\mathbf{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = x^{-1}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид $y = x^{-1}$, $\eta_1 = x^{-(k+1)}\xi_1$, $\eta_2 = x^{-k}\xi_2$, $\eta_3 = x^{-3}\xi_3$, $\eta_4 = x^{-1}\xi_4$, где ξ_i и η_i – базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через $T_{gr} = \bigoplus_{p=-1}^4 (T_{gr})_p$ градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ и через $\nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})$ супералгебру Ли векторных полей на нем. Имеется естественное действие этой супералгебры Ли на рассматриваемом супермногообразии. Если ограничение этого действия на четную компоненту сюръективно, то супермногообразие называется *четно-однородным*.

Рассмотрим следующую задачу: *описать чётно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$, $k \geq 3$.*

Опишем когомологии касательного пучка с помощью коциклов Чеха в покрытии $U = \{U_0, U_1\}$.

Из теоремы 14, доказанной в [1], вытекает

Лемма 1. *Базис пространств $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_q)$ $q = 2, 4$ может быть представлен следующими коциклами:*

1) $q = 2$

$$\begin{aligned} &x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,2k-2), x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}(r=1,\dots,2k), x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}(r=1,\dots,2k), \\ &x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,k+1), x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}(r=1,\dots,k+3), x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}(r=1,\dots,k+3), \\ &x^{-r}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,k-1), x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}(r=1,\dots,k+1), x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}(r=1,\dots,k+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,k), x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}(r=1,\dots,k+2), x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}(r=1,\dots,k+2), \\
 & x^{-r}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,k-2), x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}(r=1,\dots,k), x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}(r=1,\dots,k), \\
 & x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, x^{-r}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}(r=1,2,3), x^{-r}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}(r=1,2,3), x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}(r=1,2), \\
 & x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4}(r=1\dots 2k+2), x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}(r=1,\dots,2k-2), x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}(r=1,\dots,4), \\
 & 2) q = 4 \\
 & x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}(r=1,\dots,2k+2).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим подпучок $Aut_{(2)}O_{gr} = \exp((T_{gr})_2 \oplus (T_{gr})_4)$ пучка $Aut_{O_{gr}}$. Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом (M, O_{gr}) изоморфно множеству орбит группы $Aut_{\mathbf{E}}$ на множестве $H^1(M, Aut_{(2)}O_{gr})$.

Справедливо

Предложение 1 (см. [1]). Пусть заданы такие подпространства $Q_{2p} \subset Z^1(U, (T_{gr})_{2p})$ ($p = 1, 2$), что каждый класс когомологий из $H^1(M, (T_{gr})_{2p})$ содержит ровно по одному коциклу из Q_{2p} ($p = 1, 2$). Тогда любой класс когомологий из $H^1(M, Aut_{(2)}O_{gr})$ представляется единственным коциклом вида $z = \exp(u^2 + u^4)$, $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.

Мы будем говорить далее о задании супермногообразия (M, O) коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что (M, O) соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Рассмотрим точную последовательность (см. [2])

$$(1) \quad 0 \longrightarrow End_{\mathbf{E}} \longrightarrow \nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0 \xrightarrow{\beta} sl_2(C) \longrightarrow 0.$$

Подалгебра $a \subset \nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0$ расщепляет последовательность (1) если β изоморфно отображает ее на $sl_2(C)$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\nu(\mathbf{CP}^1, O_{gr})_0 = End_{\mathbf{E}} \oplus a$. В работе [2] показано, что супермногообразие с ретрактом $(\mathbf{CP}^1, O_{gr})$ четно-однородно тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра a , расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что супермногообразие $(\mathbf{CP}^1, O_{gr})$ является четно-однородным относительно a . В рассматриваемом случае с точностью до изоморфизма из $Aut_{\mathbf{E}}$ существуют лишь следующие расщепляющие подалгебры $a \cong sl_2(C)$ (см. [2], ниже приводятся базисы этих подалгебр):

при $k = 3$

$$\begin{aligned}
 a_1 : \quad e &= \xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - 4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4}, \\
 f &= -x^2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 4x\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 3x\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3x\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - x\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4};
 \end{aligned}$$

при $k \geq 3$

$$a_2 : \quad e = \frac{\partial}{\partial x}, \quad h = -2x \frac{\partial}{\partial x} - (k+1)\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - k\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4},$$

$$f = -x^2 \frac{\partial}{\partial x} - (k+1)x\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - kx\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3x\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - x\xi_4 \frac{\partial}{\partial \xi_4}.$$

Обозначим через $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr}))^a$ множество a -инвариантных классов когомологий.

Лемма 2. 1) Пространство $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2)^{a_1} = \{0\}$.

2) Базис пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2)^{a_2}$ может быть представлен следующими коциклами:

$$k = 3$$

$$2x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \quad 2x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2};$$

$$k \geq 4$$

$$2x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + (k+1)x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + kx^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Доказательство. Для a_2 воспользуемся теоремой 15 из [1]. В случае подалгебры a_1 доказательство проводится аналогично.

Аналогично предыдущей лемме доказывается

Лемма 3. Для любой расщепляющей подалгебры a $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_4)^a = \{0\}$.

Пусть $\lambda_2: \text{Aut}_{(2)}O_{gr} \rightarrow (T_{gr})_2$ – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому росту автоморфизма a 2-компоненту элемента $\log a$ в $(T_{gr})_2 \oplus (T_{gr})_4$.

Обозначим через $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}O_{gr})^a$ – множество классов, определяющих четно-однородные относительно a супермногообразия.

Предложение 2. a – подалгебра, расщепляющая последовательность (1), то λ_2^* биективно отображает множество $H^1(\mathbf{CP}^1, \text{Aut}_{(2)}O_{gr})^a H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2)^a$.

Доказательство следует из предложения 1 и леммы 3.

В [3] описано условие подъема векторного поля на нерасщепимое супермногообразие с его ретракта. Используя это условие и лемму 3, получаем, что четно-однородные относительно a супермногообразия задаются коциклами вида u^2 , где класс $[u^2]$ a -инвариантен и $[u^2, u^2] = 0$. Так как условие $[u^2, u^2] = 0$ выполняется для всех коциклов леммы 2, то справедлива

Теорема 1. Для любой расщепляющей подалгебры a четно-однородные относительно a супермногообразия задаются коциклами из леммы 2.

Тем самым описаны все четно-однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ при $k \geq 3$. Проведем классификацию четно-однородных супермногообразий с точностью до изоморфизма. Для этого нужно рассмотреть только случай пространства $H^1(\mathbf{CP}^1, (T_{gr})_2)^{a_2}$ при $k = 3$.

В работе [2], предложение 12, дано описание алгебры $End_{\mathbf{E}}$. Приведем его в более удобных для нас терминах. Эндоморфизм $\alpha \in End_{\mathbf{E}}$ в окрестности U_0 имеет вид

$$\alpha(\xi_i) = \sum_{j=1}^4 a_{ji}(x) \xi_j, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

где $A = (a_{ij}(x))$ – матрица с элементами $a_{ij} \in F(U_0)$. Матрица A полностью определяет эндоморфизм A , причем $a \in \text{Aut } E$ тогда и только тогда, когда A обратима в соответствующем кольце матриц. Используя предложение 6 из работы [1] получаем

Теорема 2. 1) С точностью до изоморфизма существует три нерасщепимых четно-однородных супермногообразия с ретрактом $\mathbf{CP}_{4331}^{1|4}$, заданных соответственно коциклами:

$$\begin{aligned} & 2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3}, \\ & 2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + 2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ & , \\ & 2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 3x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ & . \end{aligned}$$

2) С точностью до изоморфизма существует одно нерасщепимое четно-однородное супермногообразие с ретрактом $\mathbf{CP}_{k+1k31}^{1|4}$ при $k \geq 4$, представленное коциклом

$$2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + (k+1)x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + kx^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}.$$

Библиографический список

1. Башкин, М.А., Онищик, А.Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой [Текст] // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А.Ю.Левина. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – С. 40–57.
2. Бунегина, В.А., Онищик, А.Л. Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой [Текст] / Современная математика и ее приложения. Т.19. – М.: ВИНТИ, 2001. – С. 141–180.
3. Onishchik, A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

В.Ф. Чаплыгин

ПОЭТАПНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ И ПОНЯТИЙ

В статье показана возможность использования концепции известного отечественного психолога П.Я.Гальперина в преподавании математического анализа при формировании основных понятий и выработке навыков решения задач.

Ключевые слова: умственные действия, формирование понятий, преподавание математического анализа, теория поэтапного формирования умственных действий.

V.F. Chaplygin

STAGE-BY-STAGE FORMATION OF INTELLECTUAL ACTIONS AND CONCEPTS

This paper presents an opportunity of using the concept of the famous Russian psychologist P.Y. Galperin of teaching mathematical analysis during the formation of fundamental notions and developing the skills of problem solution.

Keywords: intellectual actions, formation of concepts, teaching the mathematical analysis, the theory of stage-by-stage formation of intellectual actions.