$$\alpha(\xi_i) = \sum_{j=1}^{4} a_{ji}(x)\xi_j \,, \; i = 1,\dots,4 \,, \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij}(x))$ – матрица с элементами $a_{ij} \in F(U_0)$. Матрица A полностью определяет эндоморфизм a, причем $a \in Aut\ \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда A обратима в соответствующем кольце матриц. Используя предложение 6 из работы [1] получаем

Теорема 2. 1) *С точностью до изоморфизма существует три нерасщепимых четно-однородных супермногообразия с ретрактом* $\mathbf{CP}^{1|4}_{4331}$, *заданных соответственно коциклами:*

$$2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} \,,$$

$$2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} + 2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \,,$$

$$2x^{-1}\xi_2\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + 4x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + 3x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3 \frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} - 4x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - 3x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \,.$$

2) *С точностью до изоморфизма существует одно нерасщепимое четно-однородное супермногообразие с ретрактом* $\mathbf{CP}^{1|4}_{k+1k31}$ *при* $k \geq 4$, *представленное коциклом*

$$2x^{-1}\xi_3\xi_4 \frac{\partial}{\partial x} + (k+1)x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + kx^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \,.$$

Библиографический список

1. Башкин, М.А., Онищик, А.Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой [Текст] // Математика, кибернетика, информатика: труды международной научной конференции памяти А.Ю.Левина. – Ярославль: ЯрГУ, 2008. – С. 40–57.
2. Бунегина, В.А., Онищик, А.Л. Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой [Текст] / Современная математика и ее приложения. Т.19. – М.: ВИНИТИ, 2001. – С. 141–180.
3. Onishchik, A.L. A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

В.Ф.Чаплыгин

ПОЭТАПНОЕ ФОРМИРОВАНИЕ УМСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ И ПОНЯТИЙ

В статье показана возможность использования концепции известного отечественного психолога П.Я.Гальперина в преподавании математического анализа при формировании основных понятий и выработке навыков решения задач.

Ключевые слова: умственные действия, формирование понятий, преподавание математического анализа, теория поэтапного формирования умственных действий.

V.F. Chaplygin

STAGE-BY-STAGE FORMATION OF INTELLECTUAL ACTIONS AND CONCEPTS

This paper presents an opportunity of using the concept of the famous Russian psychologist P.Y. Galperin of teaching mathematical analysis during the formation of fundamental notions and developing the skills of problem solution.

Keywords: ntellectual actions, formation of concepts, teaching the mathematical analysis, the theory of stage-by-stage formation of intellectual actions.

Разработанная П.Я.Гальпериным концепция о сложных многоплановых изменениях, связанных с образованием у человека новых образов, действий и понятий, предусматривает наличие шести этапов, в течение которых происходят эти изменения. Перечислим эти шесть этапов. На первом из них формируется мотивационная основа действия. На втором обозначается ориентировочная основа действия. На третьем этапе происходит материализация намеченных действий. Четвертый этап – "громкая социализованная речь", когда намеченная ориентировочная деятельность отражается не в материальных действиях, а в речи, которая на пятом этапе переходит из внешней речи в речь "про себя". И, наконец, на шестом этапе речевое выражение действия уходит из сознания и заменяется его предметным содержанием. Сказанное выше отнюдь не означает, что при формировании того или иного умственного действия или понятия будут присутствовать в явном виде все шесть перечисленных этапов, некоторые их них могут быть опущены. Однако, проектируя работу по формированию каждого конкретного действия или понятия, следует рассматривать полную систему, предусмотренную концепцией. При этом применение концепции П.Я.Гальперина в конкретной ситуации не должно носить чисто формальный характер, механически проектироваться на нее. Оно должно быть разумным, критическим, сознательным, носить творческий характер, отвечающий условиям поставленной задачи.

Далее будет рассмотрено применение описанной концепции на примерах из методики обучения математическому анализу в классических университетах студентов физических специальностей, что, впрочем, не мешает использовать эту методику, может быть частично, и в других высших учебных заведениях, например, технических или педагогических университетах. Речь пойдет о формировании понятия производной функции, способах вычисления и приложениях тройного интеграла.

Производная и дифференциал функции являются важнейшими понятиями математического анализа. При введении понятия производной функции в точке рассматривается ряд задач из геометрии, механики, физики, которые приводят к одной и той же математической операции, а именно, нахождению предела отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента. Здесь имеет смысл привести задачу о касательной к графику функции, а также задачи физического содержания, например, о нахождении мгновенной скорости движения материальной точки, электрических зарядов, радиоактивного распада и т.п. Такой подход позволяет создать у студентов мотивационную основу для формирования понятия производной. Все сказанное составляет содержание первого этапа. На втором этапе осуществляется переход от конкретных задач к общей ситуации, более абстрактной. Отказываясь от функций, описывающих реальные физические процессы, вводим определение производной функции $f(x)$ в точке x_0 как предела отношения

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

После этого проговаривается алгоритм выполнения действий, которые приводят к нахождению производной:

1) дать приращение аргументу Δx;
2) выразить приращение функции Δy;
3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) перейти в нем к пределу при стремлении Δx к нулю.

Здесь необходимо предупредить об одном заблуждении, которое может возникнуть у студентов, понимающих производную как синоним мгновенной скорости механического движения или другого физического процесса. От такой подмены понятия, его вульгаризации студентов следует предостеречь. Конечно, для функции $S(t)$, выражающей зависимость расстояния, пройденного материальной точкой, от времени, $S'(t)$ – это мгновенная скорость движения. Но это лишь одна из интерпретаций производной, но есть функции, описывающие другие физические явления и зависимости. Здесь уместно напомнить историю вопроса, подход к понятию производной И.Ньютона и Г.Лейбница.

После этого можно перейти к нахождению производных конкретных функций и выводу правил дифференцирования, сопровождая действия все меньшими и меньшими словесными комментариями, а конце концов можно и вовсе отказаться от них. Затем требуется выработать устойчивый навык дифференцирования функций на достаточно большом количестве разнообразных примеров. В результате будет сформировано понятие производной функции и выработана техника дифференцирования. Однако следует предупредить студентов, что в некоторых случаях значение производной можно найти только по определению, а не в результате формального применения правил дифференцирования. Для этого можно найти производные в точке x=0 функций $f(x)=x|x|$, $\varphi(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ для $x \neq 0$ и $\varphi(0)=0$.

Рассмотрим далее второй пример, относящийся к выработке системы действий при вычислении тройных интегралов и их применении к решению физических задач. Часто при введении понятия тройного интеграла рассматривается задача о нахождении массы тела, если известна его точечная плотность. В качестве приложений тройного интеграла рассматриваются задачи об отыскании моментов тела различных порядков, центра масс, задачи из теории потенциала. Все эти задачи создают хорошую мотивационную основу для изучения тройного интеграла. Приведем одну конкретную задачу. Пусть требуется найти центр масс тела, ограниченного поверхностями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, если его плотность в точке $\rho(x, y, z)=|x\,y\,z|$. Первое, что требуется сделать, – это наметить план действий. Как известно, для вычисления координат центра масс необходимо знать статические моменты тела относительно координатных плоскостей и его массу. Тем самым задача сводится к нахождению этих величин. В рассматриваемой задаче в силу симметрии тела относительно оси $0z$ первые две координаты центра масс $x_0=0$, $y_0=0$ (и это студенты-физики хорошо понимают). Таким образом, остается найти статический момент тела относительно координатной плоскости $X0Y$ – M_{xy}, массу тела M, и тогда $z_0=\frac{M_{xy}}{M}$. Для того, чтобы найти эти две величины, требуется вычислить два тройных интеграла. При вычислении тройных интегралов студенты часто затрудняются представить и изобразить тело, по которому ведется интегрирование, и найти его проекции на координатные плоскости. Неправильное представление может привести к ошибке. В данной задаче достаточно найти проекцию тела на плоскость $X0Y$. Из системы уравнений $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$ получаем уравнение $z^2+z-6=0$, откуда $z=2$. Следовательно, проекцией является круг $x^2+y^2 \leq 4$. Таким образом,

$$M_{xy}=\iiint\limits_V \rho(x,y,z)z\,dxdydz=\iiint\limits_V |xy|z^2\,dxdydz=\iint\limits_D |xy|\,dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} z^2dz,$$

$$M=\iiint\limits_V |xy|z\,dxdydz=\iint\limits_D xy\,dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} z^2dz,$$

где D – круг, заданный неравенством $x^2+y^2 \leq 4$. Дальнейшие вычисления нетрудно выполнить, если перейти к полярным координатам, что, впрочем, то же самое, если сразу ввести цилиндрические координаты.

Конечно, на одном примере научить студента невозможно. Но тем не менее необходимо выделить основные моменты, предупредить возможные ошибки, предусмотреть затруднения, свести задачу к менее сложной, провести анализ задачи (в рассмотренном случае он был восходящим), все это входит в педагогическую задачу преподавателя.

На двух приведенных примерах прозрачно просматривается планомерно-поэтапное формирование умственных действий. Когда студенты разберут под руководством преподавателя и самостоятельно достаточно большое количество задач, приобретут опыт, необходимость во внешней речи сократится. Студент проговаривает мысленно проводимые действия и доводит их позже до автоматизма.

Выше рассмотрены лишь два примера использования идеи П.Я.Гальперина в преподавании математического анализа. Не менее убедительно она применима при введении понятия определенного интеграла, предела функции в точке и ряде других случаев.

В заключение следует отметить, что предложенные подходы можно использовать не только для студентов физических, но и других специальностей.

Библиографический список

1. Гальперин, П.Я. Основные результаты исследования по проблеме “Формирование умственных действий и понятий” [Текст] / П.Я.Гальперин. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 49 с.
2. Размолодин, Л. П., Рыжаков, И. И. Турбулентное перемешивание в жидких и газовых потоках [Текст] // Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-22: сб. тр. XXII Междунар. науч. конф.: в 10 т. Т. 3. Секция 3 / под общ. ред. В. С. Балакирева. – Псков: Изд-во Псков. гос. политехн. ин-та, 2009. – 160 с.
3. Rose, P. M., and. R. C. Kintner. Mass Transfer from Large Oscillating Drops. // AIChE Journal. – 1966. – Vol. 12, № 3. – p. 530.