Переходя теперь к 5 – мерной космологической модели из системы космологических уравнений со спинорным полем (13), для интегрального масштабного фактора $\tau(t)=a^3b$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau}=\frac{4M}{\tau}+\frac{4\chi\hbar cs_0^2(2-n)}{\tau^n}, \quad (M\equiv\chi\hbar c\mu s_0) . \tag{18}$$

Отсюда видно, что случай квадратичной нелинейности спинорного поля ($n=2$) в пятимерии является выделенным, так как в этом случае $\tau(t)$ от спинорной нелинейности не зависит. При этом ($n=2$) уравнение (18) примет вид: $\ddot{\tau}=4M=const$, отсюда $\tau=2Mt^2+c_1t, \quad (c_1=const)$, а для функций $a(t)$ и $b(t)$ решение приведено в формуле (14).

При $n\neq 2$ и $\mu=0$ для функции $\tau(t)$ получается решение:

$$\tau(t)=\left[n\sqrt{\chi\hbar cs_0}\,t+t_0\right]^{\frac{2}{n}}, \quad (t_0=const) \tag{19}$$

Отсюда следует, что при $n<\frac{1}{2}$ получается степенная инфляция, а при $n<0$ получается отсутствие начальной сингулярности, но сингулярность в будущем:

$$\tau(t)=\frac{\tau_0}{\left(1-\frac{t}{t_f}\right)^{\beta}} \quad (\beta=-n) .$$

Если $\tau\to\infty$ при $t\to t_f$, то получается, что за конечное время $(t=t_f)$ скорость расширения Вселенной и ее размеры стремятся к бесконечности («Большой Треск» – разрыв пространства).

Библиографический список

1. Кречет, В.Г., Фильченков, М.Л., Шикин, Г.Н. Nonlinear Scalar and spinor fields simulating perfect fluid // 13российская гравитационная конференция – международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике: тезисы докладов. – М.: РУДН, 2008. – С. 62.
2. Орлова, Е.Ю. Пятимерная космология с нелинейным спинорным полем. [Текст] // 13российская гравитационная конференция - международная конференция по гравитации, космологии и астрофизике: тезисы докладов. – М.: РУДН, 2008. – С. 118.

И.В. Сандина

СИСТЕМА ВРАЩАЮЩИХСЯ ТЕЛ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

На основе метода Фока решена самосогласованная задача о вращении системы сферически-симметричных тел в пост-ньютоновском приближении. Проанализированы характер движения тел и законы сохранения. Полученные результаты дают естественное объяснение появлению вращения в иерархии космических объектов.

Ключевые слова: метод Фока, самосогласованная задача, уравнения вращательного движение системы гравитирующих тел.

I.V. Sandina

SYSTEM OF ROTATING BODIES AND PRESERVATION LAWS IN GENERAL THEORY OF RELATIVITY

The self-consistent problem of rotation of the spherically symmetric system is solved on the basis of Fock's method in post-Newton approximation. The motion of bodies and laws of conservation are analyzed. The obtained results give natural explanation for appearance of rotation in the hierarchy of cosmic objects.

Key words: Fock's method, self-consistent problem, the equation of rotational motion of gravitationally interacting bodies.

Приближенный метод В.А.Фока [1] позволяет одновременно определять из уравнений Эйнштейна общей теории относительности (ОТО)

$$R^{\mu\nu} - (1/2)g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu} \qquad (1)$$

компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$, компоненты тензора энергии и импульса $T^{\mu\nu}$ и уравнения движения системы тел с «островным» распределением материи, то есть решать самосогласованную задачу о движении тел конечных размеров в собственном гравитационном поле.

Рассмотрим задачу об определении уравнений вращательного движения системы гравитационно взаимодействующих сферически симметричных тел в релятивистской теории гравитации методом В.А.Фока.

Решение проводится в гармонической системе координат, в которой

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(g^{\mu\nu}\sqrt{-g}) = 0,$$

а неизвестные функции разлагаются в ряд по безразмерным параметрам $\upsilon^2/c^2 \ll 1$ и $U/c^2 \ll 1$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-g}\,g^{00} &= (1 + 4U/c^2 + 4S/c^4)/c + \ldots,\\
\sqrt{-g}\,g^{0i} &= (4U^i/c^2 + 4S^i/c^4)/c + \ldots,\\
\sqrt{-g}\,g^{ik} &= c(-\delta^{ik} + 4S^{ik}/c^4) + \ldots .
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь с – скорость света в вакууме; U – ньютоновский потенциал, обеспечивающий предельный переход к законам Ньютона, а остальные функции в разложении (2) дают поправки разного порядка к классической теории гравитации.

Условия (2) определяют круг задач, которые можно решать в рамках метода [1]. В гармонической системе координат достигается разделение переменных в уравнениях Эйнштейна относительно вторых производных. В некотором смысле гармоническая система аналогична инерциальной системе отсчета в евклидовом пространстве. Как было показано нами [2], в ней действительно отсутствует (как это и должно быть) гравитационное излучение дипольного характера – эффект, вызванный применением произвольных систем отсчета в ОТО и присутствующий в других, негармонических системах. Отсутствие эффектов, обусловленных неинерциальностью системы отсчета, делает гармонические координаты более удобными для исследования движения тел.

Уравнения вращательного движения согласно методу В.А. Фока будем определять из условий:

$$\int_a g(x^i\nabla_\alpha T^{\alpha k} - x^k\nabla_\alpha T^{\alpha i)}dV = 0, \qquad (3)$$

путем интегрирования по объему, занятому телом (в приведенной записи - телом «а»). Как это принято, по значкам, входящим в выражение дважды, проводится суммирование. Греческие индексы пробегают четыре значения: 0,1,2,3, а латинские – три: 1,2,3.

Компоненты тензора энергии импульса $T^{\mu\nu} = \rho V^{\mu} V^{\nu} - g^{\mu\nu} P$ (здесь V^i и V^k - 4-векторы скорости) разлагаются также в ряды по указанным параметрам и во втором приближении имеют вид:

$$\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho(1 + (\upsilon^2/2 - U + \Pi))/c^2, \\ c^2 T^{0i} &= \rho(1 + (\upsilon^2/2 - U + \Pi))/c^2 + p^{ik}/c^2, \\ c^2 T^{ik} &= \rho \upsilon^i \upsilon^k - p^{ik}, \end{aligned} \tag{4}$$

где П – плотность упругой потенциальной энергии, p_{ik} – трехмерный тензор упругих напряжений.

Учитывая главные члены в уравнении (3), получим:

$$\frac{d}{dt}\int_a \rho(x^i \upsilon^k - x^k \upsilon^i)dV = \int_a \rho(x^i \frac{\partial U}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial U}{\partial x^i})dV. \tag{5}$$

Эти уравнения выражают закон изменения полного момента импульса тела «а» в первом приближении (это – сумма орбитального и собственного моментов).

Введем обозначения: xi – координата неподвижной точки пространства, в которой находится наблюдатель, тела «налетают» на него; ai – координата центра масс движущегося тела «а». Скорость тела $\vec{\upsilon}_a$ складывается из скорости движения центра масс тела – $\dot{\vec{a}}$ и скорости движения относительно центра масс – $[\vec{\omega}_a \times (\vec{r} - \vec{a})]$.

Вводим момент импульса тела «а» относительно его центра масс в виде

$$L_{sa}^{ik} = \int_a \rho((x^i - a^i)\upsilon^k - (x^k - a^k)\upsilon^i)dV.$$

Это – собственный момент тела.

Уравнения вращательного движения тела относительно собственного центра масс можно получить из (5), выделив в нем орбитальный момент импульса. Кроме того, потенциал U, как и другие функции, входящие в разложение (2), представляем в виде суммы $U = u_a + U^{(a)}$, где u_a – потенциал, созданный телом «а»; $U^{(a)}$ – потенциал, созданный всеми телами, кроме тела «а». Последний потенциал внутри тела «а» является монотонной функцией, которую можно разложить в ряд Тейлора по степеням $(x^k - a^k)$.

Расчеты привели к следующим результатам. В первом ньютоновском приближении и момент внешних гравитационных сил (действующих со стороны других тел системы), и момент внутренних гравитационных сил тела «а» получились равными нулю. Уравнения собственного вращения тела «а» получены в виде: $\dot{\vec{\omega}}_a = 0$.

То есть в системе сферически симметричных тел все тела под действием только гравитационных сил в первом приближении вращаются без ускорения. Следовательно, энергия собственного вращения остается постоянной, а моменты всех сил равны нулю.

Все полученные результаты в этом приближении совпадают с выводами теории Ньютона, что свидетельствует о правильности применяемого метода.

Учитывая следующие члены разложения в формуле (3) и определяя из уравнений Эйнштейна (1) поправки второго порядка к неизвестным функциям U, U^i, S^{kk} ряда (2), находим уравнения собственного вращения тела «а» в следующем «постньютоновском» приближении. Эти уравнения получены при дополнительном условии $L \ll R$, то есть линейные размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними. Вычислены все постньютоновские поправки второго порядка c^{-2} с учетом членов порядка $|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}$. Запишем их в следующем виде:

$$\dot{\vec{\omega}}_a = (\vec{A}_a + \vec{B}_a + \vec{D}_a)/c^2 \qquad (6),$$

где $\vec{A}_a$ – выражение, содержащее члены $|(\vec{a}-\vec{b})|^{-3}$ и зависящее только от угловой скорости вращения тела «а», $\vec{B}_a$ – выражение, содержащее члены $|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}$ и зависящее от угловых скоростей вращения всех тел, входящих в систему, $\vec{D}_a$ – выражение не содержащее угловых скоростей тел:

$$\vec{A}_a = \gamma \sum_{b\neq a} (\vec{\omega}_a((5\dot{\vec{a}} - 3\dot{\vec{b}})(\vec{a}-\vec{b})) - 2(\vec{a}-\vec{b})(\vec{\omega}_a(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})) +$$
$$(\vec{\omega}_a(\vec{a}-\vec{b}))(\dot{\vec{a}} - 2\dot{\vec{b}}) + 4/3[\vec{\omega}_a \times \vec{\omega}_b])m_b\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-3}, \qquad (7)$$

$$\vec{B}_a = 2\gamma \sum_{b\neq a} I_b(\vec{\omega}_b((\vec{a}-\vec{b})(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})) + (\vec{a}-\vec{b})(\vec{\omega}_b(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})) + (\vec{\omega}_b(\vec{a}-\vec{b}))(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}}) +$$
$$+(\vec{\omega}_a(\vec{a}-\vec{b}))[(\vec{a}-\vec{b})\vec{\omega}_b] - (\vec{a}-\vec{b})((\vec{a}-\vec{b})[\vec{\omega}_b\vec{\omega}_a]))\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}, \qquad (8)$$

$$\vec{D}_a = 1/2\gamma \sum_{b\neq a} m_b([\dot{\vec{a}} \times \underline{b}]\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-3} +$$
$$+((\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})(\vec{a}-\vec{b}))(4[\dot{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})] - 3[\dot{\vec{a}}(\vec{a}-\vec{b})]))\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}. \qquad (9)$$

Как видно из уравнений (6), релятивистская теория гравитации приводит к принципиально новым результатам по сравнению с теорией Ньютона.

1. Каждое тело системы сферически симметричных тел вращается с ускорением, определяемым формулой (6). Аналогично, ускоренное вращение возникает и в системе двух тел.

2. Полагая в формулах (6), (7), (8), (9) $\vec{\omega}_a = 0$, то есть принимая, что одно тело «а» не вращалось первоначально, а двигалось только поступательно, получим:

$$\dot{\vec{\omega}}_a = 2\gamma \sum_{b\neq a} I_b(\vec{\omega}_b((\vec{a}-\vec{b})(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})) + (\vec{a}-\vec{b})(\vec{\omega}_b(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})) +$$
$$+(\vec{\omega}_b(\vec{a}-\vec{b}))(\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}}))\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}\,c^{-2}, \qquad (10)$$

то есть вращение остальных тел системы приводит к появлению углового ускорения у невращающегося тела и вовлечению его во вращение.

3. Более того, если $\vec{\omega}_a = 0$ и $\vec{\omega}_{bi} = 0$ (в системе тел вообще не было вращения), то

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \gamma/2 \sum_{b\neq a} m_b([\dot{\vec{a}} \times \dot{\vec{b}}]\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-3} +$$
$$+((\dot{\vec{a}}-\dot{\vec{b}})(\vec{a}-\vec{b}))(4[\dot{\vec{b}}(\vec{a}-\vec{b})] - 3[\dot{\vec{a}}(\vec{a}-\vec{b})]))\,|(\vec{a}-\vec{b})|^{-5}. \qquad (11)$$

Видим, что и в этом случае $\dot{\vec{\omega}}_a = \vec{\varepsilon}_a \neq 0$. То есть, угловое ускорение каждого тела возникает за счет поступательного движения тел. Следовательно, если тела системы первоначально не вращались, то их поступательное движение приводит к появлению вращения тел относительно их центра масс.

4. Выражение для вращающего момента сил $\vec{M}_a$ получаем, приводя уравнение (6) или (3) к виду: $\frac{d\vec{L}_{sa}}{dt} = \vec{M}_a$. Нетрудно убедиться, что $\vec{M}_a \neq 0$, в отличие от результата классической механики.

5.Проверяя выполнимость закона сохранения собственного момента импульса для системы тел, видим, что собственный момент импульса системы гравитационно-связанных тел не сохраняется: $\frac{d}{dt}\sum_a \vec{L}_{sa} \neq 0.$ Имеет место лишь закон сохранения полного момента – суммы орбитального и собственного моментов: $\sum_a (\vec{L}_{sa} + \vec{L}_{la}) = \overrightarrow{const}$ в отличие от классической механики. В ней для системы тел, связанных только гравитационными силами, имеют место два отдельных закона сохранения: закон сохранения орбитального момента и закон сохранения собственного момента импульса.

6. Из уравнений (6) стандартной процедурой получаем закон изменения энергии собственного вращения. Все слагаемые, содержащие угловые скорости вращения тел, сводятся к полной производной по времени. Но последнее слагаемое $\vec{D}_a$ не приводится к этому виду. Следовательно, в релятивистском приближении не выполняется отдельно закон сохранения энергии вращательного движения отдельного тела, как это имеет место в ньютоновом приближении.

7. Аналогично, определяя энергию собственного вращения всей системы тел $E_s = \sum_a E_{sa}$, видим, что $E_s \neq const$. Однако сохраняется полная энергия изолированной системы, равная сумме энергий поступательного движения и энергии собственного вращения системы: $E_l + E_s = const$. Следовательно, как показывают полученные результаты, энергия поступательного движения тел переходит в энергию их вращения. Сравним, в классической механике для аналогичной системы тел имеют место два отдельных закона сохранения. Это – закон сохранения энергии вращательного движения и закон сохранения энергии поступательного движения.

8. Если энергия поступательного движения изолированной системы с гравитационным взаимодействием не сохраняется, значит, гравитационное взаимодействие во втором приближении является не потенциальным, а вихревым. Хотя вихревой характер гравитационного взаимодействия является слабым эффектом, порядка υ^2 / c^2, но он может служить объяснением появления вращения в иерархической системе космических объектов (планет, звезд, звездных систем, галактик, скоплений галактик) [3,4] ввиду массивности астрофизических объектов.

Таким образом, применение законов релятивистской теории тяготения к системе сферически симметричных тел, находящихся в собственном гравитационном поле, приводит к решениям, полностью согласующимся с классической теорией только в первом приближении (как этого и требует принцип соответствия). Но во втором приближении полученные результаты принципиально отличаются от аналогичных классических.

Приведенные решения имеют многочисленные астрофизические приложения. Формулы (6), (7), (8), (9) позволяют определить законы вращательного движения конкретных физических и астрофизических тел.

Библиографический список

1. Фок, В.А. Теория пространства, времени и тяготения [Текст] // ФМЛ, 1961. – 550 с.

2. Петрова, Н.М., Сандина, И.В. Гравитационное излучение системы двух сферически симметричных тел [Текст] // ДАН СССР. – 1974. – Т. 217 – С. 22–25.
3. Whittaker, E.T. Spin in the Universe // Yearbook of Roy.Soc. –Edinburg, 1945. – P. 5–13.
4. Gamow, G. Rotating Universe? // Nature. – 1946. – V. 158.–No 4016. – P. 549.