УДК 521.62

А.В. Бородин

БАРИОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе методами барианализа, разработанного автором, исследуются алгебраические уравнения пятой и бариуравнения произвольной степени; устанавливается связь последних уравнений с алгебраическими поверхностями (теоремой Безу) и дифференциальными уравнениями Абеля.

Ключевые слова: барианализ, алгебраические уравнения пятой степени, бариуравнения, алгебраические поверхности, теорема Безу, дифференциальные уравнения Абеля

A.V. Borodin

BARI-OPERATION METHOD OF SOLVATING THE ALGEBRAIC EQUATIONS

In the work by means of bari-analisis methods, developed by the author, are investigated the algebraic equations of the 5-th and bari-equations of any degree; connection of last equations with algebraic surfaces (the theorem of Bezu) and Abel's differential equations is established.

Keywords: bari-analisis, the algebraic equations of the 5-th degree, bari-equations, algebraic surfaces, the theorem of Bezu, Abel's differential equations

Данная работа является продолжением работ [1, 2, 3]. Напомним определения и обозначения из [4]. Пусть A — коммутативная ассоциативная алгебра с делением над полем P (с единицей e). Рассмотрим множество An+1, элементами которого являются упорядоченные $(n+1)$-ки чисел из A вида

$$\langle x\rangle = \langle x_0;\bar{x}\rangle = \langle x_0;x_1,x_2,\dots,x_n\rangle \quad (\bar{x} = (x_1,x_2,\dots,x_n)\in \mathbf{A}^n) \tag{1}$$

Для элемента (1) определим баримоменты k-го порядка:

$$x^k = \mu^k(\langle x\rangle) = x_0x_1\cdots x_k \qquad (k\in \mathbf{n}=\{0,1,\dots,n\}). \tag{2}$$

Посредством (2) элемент (1) можно записать в канонической форме:

$$\langle x\rangle = \left\langle x^0;x^1/x^0,x^2/x^1,\dots,x^n/x^{n-1}\right\rangle. \tag{3}$$

При этом возможный нуль в знаменателе (соответственно нуль в числителе слева) будем называть нестандартным нулём и обозначать символом ⟨0⟩ (соответственно ⟨0⟩–1 — нестандартной бесконечностью и обозначать символом ⟨∞⟩). Элементы $\langle x\rangle = \langle x_0;\bar{x}\rangle$, $\langle y\rangle = \langle y_0;\bar{y}\rangle$ ∈An+1 называются бариравными, если

$$\mu^k(\langle x\rangle) = \mu^k(\langle y\rangle) \quad (k\in\mathbf{n}). \tag{4}$$

Линейные алгебраические операции над элементами множества An+1 определим так:

$$(\forall\lambda\in \mathrm{P},\ \langle x\rangle,\langle y\rangle\in \mathrm{A}^{n+1})$$

$$\lambda\langle x\rangle = \langle \lambda x_0;\bar{x}\rangle,\quad \mu^k(\langle x\rangle+\langle y\rangle) = \mu^k(\langle x\rangle)+\mu^k(\langle y\rangle) \ (k\in\mathbf{n}); \tag{5}$$

$$\mu^k(\langle x\rangle\langle y\rangle) = \sum_{j=0}^{k} x^{k-j}y^j + s\sum_{j=k+1}^{n} x^{k-j+n+1}y^j, \tag{6}$$

где параметр $s=\pm 1$. Операции (5), (6) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры. При этом нулевым является элемент вида $\langle\tilde{0}\rangle=\langle 0;\bar{x}\rangle$, противоположным к $\langle x\rangle=\langle x_0;\bar{x}\rangle$ — элемент вида $-\langle x\rangle=\langle -x_0;\bar{x}\rangle$, единицей — элемент вида $\langle e\rangle=\langle e;\bar{0}\rangle$. С этого момента элементы вида (1) (или (3)) называются бариэлементами n-го порядка (БЭЛ), а множество $\langle\mathbf{A}\rangle_s^n$ таких БЭЛ — при $s=+1$ ($s=-1$) эллиптической (гиперболической) бариалгеброй (БА) n-го порядка над полем P. Поскольку компоненты БЭЛ (1) являются элементами из A , то наряду с умножением БЭ (1) на скаляр λ ∈ P можно определить его умножение на элемент a ∈ A по формуле

$$a\langle x\rangle=\langle a\,x_0;\bar{x}\rangle. \tag{7}$$

Поэтому множество An+1 можно трактовать ещё как барилинейное пространство (БЛП) над алгеброй A.

Если A — алгебра с инволюцией: x → x∗ [6], то на БА $\langle\mathbf{A}\rangle_s^n$ инволюцию ⟨x⟩ → ⟨x⟩∗ можно определить так:

$$\mu^0\left(\langle x\rangle^*\right)=\left(x^0\right)^*,\quad \mu^k\left(\langle x\rangle^*\right)=s\left(x^{n-k+1}\right)^*\quad \left(k\in\mathbf{n}\right). \tag{8}$$

При этом БЭЛ ⟨x⟩ называется бариэрмитовым, если $\langle x\rangle=\langle x\rangle^*$, т.е. если

$$x^0=\left(x^0\right)^*,\quad x^k=s\left(x^{n-k+1}\right)^*\quad \left(k\in\mathbf{n}\right). \tag{9}$$

Введём бариунитарные БЭ вида

$$\langle e\rangle_0=\langle e;\bar{0}\rangle,\quad \langle e\rangle_k=\langle\langle 0\rangle;e,\ldots,e,\langle\infty\rangle,0,\ldots,0\rangle\quad \left(k\in\mathbf{n}\right), \tag{10}$$

где ⟨∞⟩ стоит на k-м месте. В силу (2), (4) $\mu^j\left(\langle e\rangle_k\right)$ $\mu^j\left(\langle e\rangle_k\right)=\delta_k^j\,e$, где δ_k^j — стандартный символ Кронекера. Поэтому ввиду (4), (5) (7)

$$\langle x\rangle=x^k\langle e\rangle_k,$$

где здесь и дальше используется краткая тензорная форма записи. Следовательно, (10) — это естественный барибазис в ⟨A⟩n+1, а баримоменты (2) — естественные барикоординаты БЭЛ (1) относительно базиса (10). Наряду с естественным барибазисом (10) на БА $\langle\mathbf{A}\rangle_s^n$ существуют спектральный барибазис (эллиптический со знаком « - » и гиперболический со знаком « + »)

$$\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}=\frac{1}{n+1}\left\langle e;\varepsilon_k^{\pm},\varepsilon_k^{\pm},\ldots,\varepsilon_k^{\pm}\right\rangle\quad \left(k\in\mathbf{n}\right), \qquad 11)$$

где $\varepsilon_k^-=\exp\frac{(2k+1)\pi}{n+1}$, $\varepsilon_k^+=\exp\frac{2k\pi}{n+1}\quad\left(k\in\mathbf{n}\right)$. Элементы $\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}$ этих базисов обладают спектральными свойствами:

$$\langle\varepsilon\rangle_j^{\pm}\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}=\begin{cases}\langle\tilde{0}\rangle, & если\ j\neq k\\ \langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}, & если\ j=k\end{cases},\quad \sum_{k=0}^{m}\langle\varepsilon\rangle_k^{\pm}=\langle e\rangle.$$

Для каждого $\langle x\rangle\in\langle\mathbf{A}\rangle_s^n$

$$\langle x\rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big)\langle \varepsilon\rangle_k^{\pm}, \qquad (12')$$

где спектральные барикоординаты (СБК)

$$\lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big) = (n+1)\left\langle \langle x\rangle, \langle \varepsilon\rangle_k^{\pm}\right\rangle = \sum_{j=0}^{n} x^j \Big((\varepsilon_k^{\pm})^j\Big)^* \qquad (12)$$

– собственные (спектральные) значения БЭЛ $\langle x\rangle$, отвечающие его собственным элементам (11), то есть

$$\langle x\rangle\langle \varepsilon\rangle_k^{\pm} = \lambda_k^{\pm}\big(\langle x\rangle\big)\langle \varepsilon\rangle_k^{\pm},$$

а $\left\langle \langle x\rangle, \langle y\rangle\right\rangle \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k (y^k)^*$) – барискалярное произведение БЭЛ $\langle x\rangle$ и $\langle y\rangle$. Собственные значения (12) одновременно являются корнями характеристического уравнения

$$P\big(\lambda;\langle x\rangle\big) \overset{def}{=} \lambda^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\operatorname{tr}_k\big(\langle x\rangle\big)\,\lambda^{n-k} = 0, \qquad (13)$$

где $\operatorname{tr}_k\big(\langle x\rangle\big)(k\in\mathbf{n})$ – след k-го порядка барилинейного оператора умножения $\langle\langle x\rangle\rangle_s$ на БЭЛ $\langle x\rangle$ (подробнее в [4]). В частности, $\operatorname{tr}_0\big(\langle x\rangle\big) = (n+1)\,x_0$, $\operatorname{tr}_n\big(\langle x\rangle\big) = \det\langle x\rangle$.

Рассмотрим на спектральной алгебре A [1,4] произвольное алгебраическое уравнение (АУ)

$$P(s) \overset{def}{=} s^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1} a_k\, s^{n-k} = 0, \qquad (14)$$

где $a_k \in \mathbf{A}\ \ (k\in\mathbf{n})$ – коэффициенты полинома $P(s)$. Как известно [1,4], для любого полинома $P(s)\ \ (n+1)$-й степени существует порождающий его БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle \mathbf{A}\rangle_s^n$ такой, что $P(s) = P\big(s;\langle x\rangle\big)$, то есть

$$\operatorname{tr}_k\big(\langle x\rangle\big) = a_k \quad (k\in\mathbf{n}). \qquad (15)$$

где левые части – однородные многочлены (формы) k-й степени $(k\in\mathbf{n})$. Как известно [4,5], система (15) совместна и имеет от одного до $(n+1)!$ разных решений – БЭЛ $\langle x\rangle$. Алгебраическое уравнение (14), для которого система (15) разрешима, в конечном виде называется бариразрешимым АУ [5].

Для приведённого АУ 5-й степени

$$s^5 + a_2 s^3 - a_3 s^2 + a_4 s - a_5 = 0, \qquad (16)$$

где $a_k\ (k = 2,3,4,5)$, порождающий его БЭЛ $\langle x\rangle \in \langle \mathbf{C}\rangle_e^4$ определяется системой (15) вида

$$5x^0 = 0,\quad x^1x^4 + x^2x^3 = a_2/5,$$

$$-x^1(x^2)^2 - (x^1)^2x^3 + x^2(x^4)^2 + (x^3)^2x^4 = a_3/5,$$

$$-(x^1)^3x^3 + (x^1)^2(x^4)^2 - (x^2)^3x^4 + (x^2)^2(x^3)^2 +$$
$$+ x^3(x^4)^3 - x^1x^2x^3x^4 = a_4/5, \qquad (17)$$

$$(x^1)^2(x^2)^2x^4 - x^1(x^2)^3x^3 - x^1(x^3)^2(x^4)^2 + x^2(x^3)^3x^4 - (x^1)^3x^3x^4 + x^1x^2(x^4)^3 +$$
$$+ (x^1)^2x^2(x^3)^2 - (x^2)^2x^3(x^4)^2 - (x^1)^5 + (x^2)^5 - (x^3)^5 + (x^4)^5 = a_5/5,$$

где левые части – однородные многочлены (формы) 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й степени соответственно (от 5 переменных $x^k \in \mathbf{C}$ $(k = 0,1,2,3,4)$).

Следовательно, имеет место утверждение.

Теорема 1. АУ 5-й степени (16) бариразрешимо посредством (12), (11) тогда и только тогда, когда система (15) разрешима в конечном виде.

Система (17) позволяет конструировать АУ (16) с заданными свойствами его корней. Например, для того чтобы АУ (16) имело только вещественные корни, достаточно, чтобы порождающий его БЭЛ $\langle x \rangle$ был бариэрмитовым, т. е. (см. (9)) удовлетворял условиям:

$$x^4 = -(x^1)^*, \quad x^3 = -(x^2)^*. \qquad (18)$$

Но если все корни АУ (16) – вещественные числа, то и его коэффициенты a_k $(k = 2,3,4,5)$ – вещественные числа (с точностью до общего комплексного множителя). Поэтому соответствующий бариэлемент

$$\langle x \rangle = \left\langle \langle 0 \rangle; x^1 / \langle 0 \rangle, x^2 / x^1, x^3 / x^2, x^4 / x^3 \right\rangle \in \langle \mathbf{C} \rangle_e^4$$

будем искать с барикоординатами $x^k \in \mathbf{R}$ $(k = 1,2,3,4)$. Тогда в силу условий (18) система АУ (17) примет вид

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = -a_2/5,$$
$$x^1(x^2)^2 - (x^1)^2 x^2 = -a_3/10,$$
$$2(x^1)^3 x^2 + x^1(x^2)^3 - (x^1)^2(x^2)^2 + (x^1)^4 + (x^2)^4 = a_4/5, \qquad (19)$$
$$-(x^1)^3(x^2)^2 + x^1(x^2)^4 - (x^1)^4 x^2 + (x^1)^2(x^2)^3 - (x^1)^5 + (x^2)^5 = a_5/10.$$

Отсюда заключаем, что имеет место утверждение.

Следствие 1. Для того чтобы АУ 5-й степени (16) имело вещественные корни, достаточно, чтобы его коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}$ $(k = 2,3,4,5)$ допускали представление (19), где x^1 и x^2 – произвольные вещественные числа. При этом корни определяются по формуле (12), (11), где $\varepsilon_k^- = \exp\left((2k+1)\pi/5\right)$ $(k = 0,1,2,3,4)$.

Сразу же отметим, что из 2-го уравнения системы (17) и условия (18) следует условие на коэффициент a_2 АУ (16):

$$a_2 \le 0. \qquad (20)$$

Если в (19) сделать замену переменных

$$y_1 = x^2 - x^1, \quad y_2 = x^1 x^2,$$

соответственно,

$$x^1 = 2^{-1}\left(-y_1 \pm \sqrt{2y_2 - a_2/5}\right) = 2^{-1}\left(-y_1 \pm \sqrt{(-a_3 y_1^{-1} - a_2)/5}\right), \qquad (211)$$

$$x^2 = 2^{-1}\left(y_1 \pm \sqrt{2y_2 - a_2/5}\right) = 2^{-1}\left(y_1 \pm \sqrt{(-a_3 y_1^{-1} - a_2)/5}\right), \qquad (212)$$

то (19) перепишется так:

$$y_1^2 + 2y_2 = -a_2/5, \quad y_1 y_2 = -a_3/10, \qquad (191)$$

$$x^1 - y_1 = \frac{2(5a_4 - a_2^2)}{5a_3}, \quad y_1 - \frac{5a_3}{2a_2^2} y_2 = \frac{5a_5 - 2a_2 a_3}{2a_2^2}. \qquad (192)$$

Из уравнений (191) следует, что для любых значений a_2 и a_3 величина y_1 является вещественным решением АУ 3-й степени

$$y_1^3 + 5^{-1} a_2 y_1 - 5^{-1} a_3 = 0, \tag{221}$$

а величина y_2, связанная с y_1 формулой $y_2 = -10^{-1} a_3 y_1^{-1}$, решением АУ 3-й степени

$$y_2^3 + 10^{-1} a_2 y_2^2 + 200^{-1} (a_3)^2 = 0. \tag{222}$$

Остаётся на коэффициенты a_2 и a_3, наряду с (20), наложить ограничения, при которых переменные x^1 и x^2 из (21) вещественные, что ввиду (21) равносильно условию

$$a_3 r_1^{-1} \le -a_2, \tag{231}$$

или условию

$$r_2 \ge a_2 / 10, \tag{232}$$

где r_1 и r_2 – вещественные корни АУ (221) и (222) соответственно. Таким образом, следствие 1 с учётом соотношений (192) конкретизируется следующим образом.

Следствие 2. Для того чтобы АУ 5-й степени (16) имело вещественные корни, достаточно, чтобы его коэффициенты $a_k \in \mathbf{R}\ (k = 2,3,4,5)$ удовлетворяли условиям: 1) $a_2 \le 0$; 2) a_2 и a_3 такие, что для одного из корней $r_1 \in \mathbf{R}$ АУ (221) имеет место неравенство (231); 3) a_4 и a_5 определены по формулам:

$$a_4 = \frac{1}{5} a_2^2 + \frac{1}{2} a_3 \left(s_1 - r_1\right), \quad a_5 = \frac{2}{5} a_2 \left(a_3 + a_2 r_1\right) - a_3 r_2, \tag{24}$$

где $s_1 = 2^{-1} \left(-r_1 \pm \sqrt{(-a_3 r_1^{-1} - a_2)/5} \right)$, $r_2 = -10^{-1} a_3 r_1^{-1}$. При этом корни АУ 5-й степени (16) определяются по формуле (12), (11), где

$$\varepsilon_k^- = \exp\left((2k+1)\pi/5\right)\ (k = 0,1,2,3,4),$$

$$x^0 = 0,\ x^4 = -x^1 = -s_1,$$

$$x^3 = -x^2 = -s_2 = -2^{-1} \left(r_1 \pm \sqrt{(-a_3 r_1^{-1} - a_2)/5} \right),$$

и, следовательно, АУ (16) разрешимо в радикалах.

Замечание 1. Частный «крайний» случай условия 1), когда $a_2 = 0,$ не представляет интереса, так как в силу 1-го уравнения системы (19) $x^1 = x^2 = 0$ и АУ (16) принимает тривиальный вид $s^5 = 0$. К тому же, в этом случае АУ (16) не может иметь все пять корней вещественными (самое большее три).

Замечание 2. Заключительное утверждение следствия 1 отличается от аналогичных утверждений относительно корней АУ 5-й степени [6, 7], во-первых, отсутствием условий $a_2 = a_3 = 0$ (формы Бринга) и рациональности его коэффициентов, во-вторых, указанием достаточных условий, при которых все пять корней АУ 5-й степени вещественные числа.

Замечание 3. Следствие 1 можно сформулировать ещё так: если коэффициенты $a_2 \in \mathbf{R}$ и $a_3 \in \mathbf{R}$ АУ 5-й степени (16) удовлетворяют условиям 1) и 2), а числа $\tilde{a}_4$ и $\tilde{a}_5$ определены по формулам (24), то график Γ_5 полинома $P_5(s) = s^5 + a_2 s^3 - a_3 s^2 + a_4 s - a_5$ при любых значениях коэффициентов $a_4 \in \mathbf{R}$ и $a_5 \in \mathbf{R}$ пересекается с графиком (прямой линией) Γ_1 полинома $P_1(s) = (a_4 - \widetilde{a}_4)\, s - (a_5 - \widetilde{a}_5)$ ровно в пяти точках (с учётом порядка касания).

Далее, сюръекция (15) между СБА $\langle \mathbf{A} \rangle_s^n$ и множеством АУ $(n+1)$-й степени позволяет установить следующие алгебраические свойства нулей полиномов.

Теорема 1. Пусть $P\left(s;\langle x \rangle_i\right)$ $\left(i = 1,2,\ldots,m\right)$ и $P\left(s;\langle x \rangle\right)$ – полиномы $(n+1)$-й степени от переменной $s \in \mathbf{A}$, отвечающие БЭЛ $\langle x \rangle_i$ $\left(i = 1,2,\ldots,m\right)$ и $\langle x \rangle$ соответственно, причём, $\langle x \rangle = P\left(\langle x \rangle_1, \langle x \rangle_2, \ldots, \langle x \rangle_m\right)$, где $P\left(s_1, s_2, \ldots, s_m\right)$ – произвольный полином (над спектральной алгеброй A) от m переменных $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Тогда нули $\lambda_k = \lambda_k\left(\langle x \rangle\right)$ и $\lambda_{ki} = \lambda_k\left(\langle x \rangle_i\right)$ соответственно полиномов $P\left(s;\langle x \rangle\right)$ и $P\left(s;\langle x \rangle_i\right)$ $\left(i = 1,2,\ldots,m\right)$, упорядоченные формулой (12), связаны между собой формулой

$$\lambda_k = P\left(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \ldots, \lambda_{km}\right) \quad \left(k = 0,1,2,\ldots,n\right).$$

С помощью этой теоремы, например, нетрудно показать, что если x_1 и x_2 нули квадратного трёхчлена $P_1(x) = x^2 - a_1 x + a_2$, а y_1 и y_2 нули квадратного трёхчлена $P_2(y) = y^2 - b_1 y + b_2$ (упорядоченные формулой (12)), то $z_1 = x_1 + y_1$ и $z_2 = x_2 + y_2$ нули квадратного трёхчлена $P_3(x) = z^2 - c_1 z + c_2$, где

$$c_1 = a_1 + b_1, \quad c_2 = a_2 + b_2 + \frac{1}{2}\left(a_1 b_1 + \sqrt{(a_1{}^2 - 4a_2)(b_1{}^2 - 4b_2)}\right).$$

Аналогичные результаты можно получить относительно других алгебраических операций и не обязательно только для полиномов второй степени (например, для (16) при условиях следствия 2); просто технически это сложнее и потребует соответственно больше места.

Кроме того, сюръекция (15) позволяет свести решение АУ (14) к решению системы АУ (15). Решение же системы АУ (15), как следует из работ [1,2,3], является более простой задачей, нежели решение АУ (14). Тем самым, бариоперационный метод решения АУ проще метода Лагранжа, базирующегося на теории симметричных многочленов [6]. С теоретической же точки зрения, он позволяет по-новому и глубже взглянуть на резольвенты Лагранжа, ибо последние фактически совпадают с правыми частями соотношений (12), определяющими собственные значения БЭЛ $\langle x \rangle$.

Далее вместо (14) рассмотрим бариалгебраическое уравнение (БАУ) $(n+1)$-й степени над ЭБА $\langle \mathbf{C} \rangle_e^n$

$$P\left(\langle x \rangle\right) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \langle a \rangle_k \, \langle x \rangle^{n-k+1} = \langle \widetilde{0} \rangle, \qquad (25)$$

где $\langle a \rangle_k \in \langle \mathbf{C} \rangle_s^n \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ – барикоэффициенты. Относительно неизвестных $x^k = \mu^k\left(\langle x \rangle\right)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ БАУ (25) эквивалентно системе АУ n-й степени

$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{k}a_j^i\,\mu^{k-i}\left(\langle x\rangle^{n-j+1}\right)+s\sum_{i=k+1}^{n}a_j^i\,\mu^{k-i+n+1}\left(\langle x\rangle^{n+1-j}\right)\right)=0$$
$$(k=0,1,2,\dots,n) \qquad , \qquad (26)$$

где согласно (6) $\mu^i\left(\langle x\rangle^{n-j+1}\right)=q_i^{n-j+1}(x^0,x^1,\dots,x^n)\ (i=0,1,\dots,n)$ – однородные формы степени $n-j+1 \quad (j=0,1,\dots,n+1)$ относительно переменных $x^k=\mu^k(\langle x\rangle)$ $(k=0,1,\dots,n)$. Явная запись этих форм потребовала бы много места, поэтому опускается.

Таким образом, зная решение БАУ (25), можно получить все решения весьма непростой системы АУ (26), то есть найти все точки пересечения $(n+1)$-й алгебраической поверхности, представленной АУ (26), а заодно и все бари-точки равновесия баридифференциального уравнения (БДУ) Абеля 1-го рода:

$$\langle\dot{x}\rangle=\sum\nolimits_{k=0}^{n+1}(-1)^k\langle a\rangle_k\langle x\rangle^{n-k+1},$$

а значит, все точки равновесия соответствующей нелинейной относительно неизвестных $x^k\ (k=0,1,\dots,n)$ системы ДУ:

$$\dot{x}^k=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\left(\sum_{i=0}^{k}a_j^i\,\mu^{k-i}\left(\langle x\rangle^{n-j+1}\right)+s\sum_{i=k+1}^{n}a_j^i\,\mu^{k-i+n+1}\left(\langle x\rangle^{n+1-j}\right)\right)$$
$$(k=0,1,2,\dots,n) \qquad (27')$$

Систему ДУ (27’) (как, впрочем, и (26), где $\dot{x}^k=0$) можно переписать ещё так:

$$\dot{x}^k=\sum\nolimits_{j=0}^{n+1}\varphi_{n-j+1}^k(\bar{x}_{\hat{k}})\,(x^k)^j, \quad (k=0,1,\dots,n) \qquad (27)$$

где $\varphi_{n-j+1}^k(\bar{x}_k) \quad (k=0,1,\dots,n)$ – однородные формы степени $n-j+1$ $(j=0,1,\dots,n+1)$ относительно переменных $\bar{x}_k=\{x^0,x^1,\dots,x^n\}\setminus\{x^k\}$ («без x^k»).

Для нахождения решений БАУ (25) воспользуемся бариспектральным методом, базирующимся на спектральной теореме из [4]. Согласно этой теореме, БАУ (25′) эквивалентно АУ $(n+1)$-й степени над полем $\mathbf{C}$ [4]:

$$\sum\nolimits_{j=0}^{n+1}(-1)^k\alpha_{jk}^{\pm}\,(\lambda_k^{\pm})^{n-j+1}=0 \quad (k=0,1,\dots,n) \qquad (28)$$

где $\alpha_{jk}^{\pm}=\lambda_k^{\pm}\left(\langle a\rangle_j\right)$, $\lambda_k^{\pm}=\lambda_k^{\pm}(\langle x\rangle)\ (k=0,1,\dots,n)$ – СБК барикоэффициентов $\langle a\rangle_j$ и баринеизвестной $\langle x\rangle$ соответственно. При этом ещё раз важно отметить, что правая часть формулы (12) является ни чем иным, как резольвентой Лагранжа [6] многочлена $(n+1)$-й степени, корнями которого являются БК x^k БЭЛ $\langle x\rangle\in\langle\mathbf{C}\rangle_e^n$, а предшествующая формула (12’) – формулой обращения резольвенты Лагранжа.

Для каждого $k\in\{0,1,\dots,n\}$ АУ (28) имеет ровно $(n+1)$ корень $\lambda_{ki}^{\pm}\in\mathbf{C}$ $(i=1,\dots,n+1)$. Подставляя эти корни в (12’), получим ровно $(n+1)^{n+1}$ бари-корней БАУ (25):

$$\langle x\rangle_{\bar{i}} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{ki_k}^{\pm} \langle \varepsilon\rangle_k^{\pm} \quad \left(\bar{i} = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1,\ldots,n\}^{n+1}\right). \qquad (29)$$

А поскольку координаты точек пересечения алгебраических поверхностей (26) в пространстве $\mathbf{C}^{\mathbf{n+1}}$ совпадают с барикоординатами БЭЛ (29), то алгебраические поверхности (26) пересекаются ровно в $(n+1)^{n+1}$ точках. Этот факт является своеобразной иллюстрацией глобальной теоремы Безу из [8] и связи бариалгебраического уравнения (25) с этой теоремой.

Библиографический список

1. Бородин, А.В. Бариоперационный метод исследования алгебраических уравнений I [Текст] / А.В. Бородин // Математика, физика, экономика и физико-математическое образование. Ч. 1: материалы конференции “Чтения Ушинского” физ.-мат. ф-та. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. С. 15 – 23.
2. Бородин, А.В. Бариоперационный метод исследования алгебраических уравнений II [Текст] / А.В. Бородин // Математика, физика, экономика и физико-математическое образование. Ч. 1: материалы конференции “Чтения Ушинского” физ.-мат. ф-та. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. С. 15 – 23.
3. Бородин, А.В. Бариоперационный метод исследования алгебраических уравнений III // Математика и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания [Текст] / А.В. Бородин // Материалы международной конференции “Чтения Ушинского” физ.-мат. ф-та. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. С. 15 – 23.
4. Бородин, А.В. Многомерный барианализ и иго приложения. Ч. I [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. – 432 с.
5. Бородин, А.В. Многомерные спектральные алгебры и их приложения II [Текст] / А.В. Бородин // Математика и математическое образование. Теория и практика: межвуз. сб. научн. тр. Вып. 3. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2002. С. 67 – 86.
6. Прасолов, В.В. Эллиптические функции и алгебраические уравнения [Текст] / В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьев. – М.: Изд-во «Факториал», 1997. – 288 с.
7. Бородин, А.В. Бариразрешимые алгебраические уравнения четвертой и пятой степени [Текст] / А.В. Бородин, И.А. Варин // Современные проблемы математики и информатики: сб. научн. тр. Вып. 5 / Ярославль, – 2002. – С. 27–35.
8. Гриффитс, Ф. Принципы алгебраической геометрии [Текст]: в 2 т. / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. – М.: Мир, 1982. – Т. 1, 2. – 862 с.