

П.А. Корнилов

О ПЕРЕСТАНОВКАХ ЧИСЛОВЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

В данной статье рассматриваются перестановки условно сходящихся функциональных рядов в пространствах $L_p[0,1]$ при $1 \leq p \leq 2$. Известная теорема Римана утверждает, что множество сумм любого сходящегося числового ряда линейно. М.И.Кадец доказал, что в пространствах $L_p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ условия линейности множества сумм ряда выглядит сле-

дующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{\min(2,p)} < \infty$. В данной статье приводится пример ряда с нелинейным в пространстве $L_p[0,1]$ множеством сумм, который показывает неусиливаемость условия М.И.Кадеца в рассматриваемых пространствах.

Ключевые слова: перестановки функциональных рядов, теорема Римана, линейность множества сумм.

P.A. Kornilov

ABOUT SHIFTS OF NUMERICAL AND FUNCTIONAL NUMBERS

This article is devoted to permutations of functional series in $L_p[0,1]$ with $1 \leq p \leq 2$. Riman's theorem states that all number series have linear set of sums. Cadec shows that functional series in $L_p[0,1]$ have linear set of sums if satisfies condition $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{\min(2,p)} < \infty$. In this article we proved that this condition can not be strengthened.

Keywords: Permutations of functional series, Riman's theorem, linearity of the set of sums.

Известна классическая теорема Римана: для любого условно сходящегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и любого действительного числа α существует перестановка π данного ряда, сходящаяся к данному числу: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha$.

М.И. Кадец в [3] ввёл определение области сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ векторов банахова пространства X как множества всех таких $y \in X$, что при некоторой перестановке π ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ сходится к y . Для рядов комплексных чисел описание области сумм было дано П.Леви в 1905 году.

Е. Штейниц [1] в 1913 году доказал следующую теорему: область сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в m -мерном пространстве X есть подпространство вида $s + \Gamma 0$, где s – сумма исходного ряда, а $\Gamma 0$ – аннулятор

множества $\Gamma = \left\{ f \in X^* : \sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)| - \text{сходится} \right\}$.

М.И. Кадец в [3] доказал, что в пространствах $L_p[0,1]$ при $1 \leq p < \infty$ условия линейности множества сумм ряда выглядят следующим образом: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{\min(2,p)} < \infty$, где под нормой понимается стандартная норма в пространстве $L_p[0,1]$, а линейным называется множество, которое вместе с любыми своими двумя точками содержит и прямую, проходящую через них.

Банах выдвинул гипотезу о том, что множество сумм функционального ряда относительно сходимости почти всюду является линейным. Однако оказалось, что в бесконечномерном банаховом пространстве аналог теоремы Штейница неверен и область сумм ряда может быть нелинейной [4], незамкнутой [5], состоять, например, из двух точек, образовывать любую конечную или бесконечную арифметическую прогрессию в произвольном банаховом пространстве [10]. Автором были построены примеры рядов, область сумм которых обладает свойством линейности в одних пространствах (и при этом является нетривиальной) и не обладает этим свойством в других пространствах [8,9].

Е.М. Никишин в [4] доказал, что при $p \geq 2$ данное М.И.Кадцом условие нельзя заменить на более слабое условие $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^{2+\varepsilon} < \infty$ ни при каких $\varepsilon > 0$.

В работе [6] автором была доказана неусилимость условия Кадеца линейности множества сумм в пространствах $L_p[0,1]$ при $1 \leq p \leq 2$ в виде следующей теоремы:

Пусть дана произвольная функция $\omega(x)$, положительная при $x > 0$ и такая, что $\lim_{x \rightarrow +0} \omega(x) = 0$ при $x \rightarrow +0$. Тогда найдётся ряд из функций, принадлежащих всем пространствам $L_p[0,1]$ при $1 \leq p \leq 2$ и две его перестановки σ_1 и σ_2 такие, что:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n\|_{L_p}^p \cdot \omega(\|\varphi_n\|_{L_p}) < \infty$ при всех $1 \leq p \leq 2$,
- 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_1(n)}$ сходится к 0 по норме $L_p[0,1]$ при всех $1 \leq p \leq 2$,
- 3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{\sigma_2(n)}$ сходится к 1 по норме $L_p[0,1]$ при всех $1 \leq p \leq 2$,
- 4) ни при каких нецелых $\lambda \in R$ и $p \in [1,2]$ не существует перестановки данного ряда, после которой он сходится к λ по норме пространства $L_p[0,1]$.

В данной работе, несколько изменив конструкцию доказательства, мы хотим придать ей окончательный вид. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. Пусть задан произвольный положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого стремится к нулю, и число p , $1 \leq p \leq 2$, причём $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \infty$. Тогда существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функций из пространства $L_p[0,1]$, множество сумм которого нелинейно и $\|f_n\|_{L_p} = a_n$ при всех $n=1,2,\dots$

Доказательство теоремы 1.

Без ограничения общности, поскольку речь идёт о перестановках рядов, мы будем считать, что общий член данного числового ряда стремится к нулю монотонно. Кроме того, мы будем для удобства считать, что все его члены не превосходят 1, поскольку добавление или удаление любого

конечного числа любых функций из пространства $L_p[0,1]$ не влияет на структуру множества сумм ряда в этом пространстве, а просто сдвигает его множество сумм на фиксированную функцию. Разобьём данный числовой ряд на два ряда – из членов с нечётными номерами и членов с чётными

номера. Из теоремы сравнения положительных рядов вытекает, что оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^p$ расходятся. Обозначим их частные суммы через S_n и S'_n , $n=1,2,3,\dots$ соответственно. Нулевые частные суммы, естественно, будем считать равными 0. Далее, определим две системы множеств E_n и E'_n , $n=1,2,3,\dots$ из полуинтервала $[0,1)$ следующим образом: множество E_n состоит из дробных частей всех точек полуинтервала $[S_{n-1}, S_n)$, а множество E'_n состоит из дробных частей всех точек полуинтервала $[S'_{n-1}, S'_n)$. Ясно, что каждое из определённых нами множеств представляет собой один полуинтервал (если полуинтервал $[S_{n-1}, S_n)$ или $[S'_{n-1}, S'_n)$ не содержит целую точку) или два полуинтервала на $[0,1)$.

Теперь определим две последовательности функций, из которых и будет состоять искомый ряд:

$$f_n^+(x) = \chi_{E_n}(x) \quad \text{и} \quad f_n^-(x) = -\chi_{E'_n}(x), \quad \text{при всех } x \in [0,1] \quad \text{и } n=1,2,3,\dots,$$

где $\chi_E(x)$ означает характеристическую функцию множества E .

Для вычисления норм построенных функций заметим, что при всех $n=1,2,3,\dots$ $mes\{x: x \in E_n\} = S_n - S_{n-1} = a_{2n-1}^p$ и, аналогично, $mes\{x: x \in E'_n\} = a_{2n}^p$. Отсюда, по определению

нормы пространства $L_p[0,1]$, имеем:

$$\|f_n^+\|_{L_p} = \left(\int_0^1 |f_n^+(t)|^p dt \right)^{1/p} = (mes(E_n))^{1/p} = a_{2n-1} \quad \text{при всех } n=1,2,3,\dots$$

$$\text{Аналогично,} \quad \|f_n^-\|_{L_p} = a_{2n} \quad \text{при всех } n=1,2,3,\dots$$

Итак, первый пункт теоремы 1 доказан. Для доказательства второго пункта теоремы построим перестановки σ_1 и σ_2 ряда, после которых переставленные ряды будут сходиться к нулевой и единичной функции соответственно в пространстве $L_p[0,1]$. Построение будет идти по схеме, предложенной Риманом для числовых рядов в своей знаменитой теореме.

При построении обеих перестановок как положительные, так и отрицательные функции мы будем располагать в том порядке, в котором они нумеровались. При этом каждая частичная сумма

переставленного ряда разобьётся на сумму двух частичных сумм рядов $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^-$. Наша

задача при построении перестановки σ_1 состоит в том, чтобы «перемешать» положительные и отрицательные функции так, чтобы они почти компенсировали друг друга. Опишем формальное правило построения данной перестановки. Начинаться она будет с первой положительной функции. Далее, если в перестановку уже вошли первые M положительных и первые K отрицательных

функций, то следующей в перестановку будет включена функция f_{M+1}^+ , если $S_M \leq S'_K$ или функция f_{K+1}^- , если $S_M > S'_K$. Посмотрим, как устроена сумма M первых положительных функций.

Если обозначить целую часть S_M через c_M , а дробную – через d_M , то из определения функций f_n^+ видно, что на полуинтервале $[0, d_M)$ их сумма равна $c_M + 1$, а на полуинтервале $[d_M, 1)$ сум-

ма равна c_M . Аналогично, для суммы первых K отрицательных функций обозначим целую часть S'_K через c'_K , а дробную – через d'_K . Тогда частичная сумма ряда функций f^{-}_n будет равна $(-c'_K - 1)$ на полуинтервале $[0, d'_K)$ и $(-c'_K)$ на полуинтервале $[d'_K, 1)$.

Отсюда вытекает, что $\sum_{n=1}^M f^{+}_n(x) + \sum_{n=1}^K f^{-}_n(x)$ отличается от 0 на множестве меры $|S_M - S'_K|$, на котором она принимает значение ± 1 . Поскольку из построения перестановки следует, что $|S_M - S'_K| \leq \max(a^{p_{2M-1}}, a^{p_{2K}}) \rightarrow 0$, то построенная перестановка σ_1 сходится к нулю. Осталось заметить, что в неё войдут как все положительные, так и все отрицательные функции (из-за расхо-

димости рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}^p$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^p$).

Для построения перестановки σ_2 и доказательства её сходимости к единичной функции поступим аналогично, но правило её построения будет выглядеть следующим образом: начинаться она будет с первой положительной функции. Далее, если в перестановку уже вошли первые M положительных и первые K отрицательных функций, то следующей в перестановку будет включена функция f^{+}_{M+1} , если $S_M \leq S'_K + 1$, или функция f^{-}_{K+1} , если $S_M > S'_K + 1$. При этом снова перестановка σ_2 будет содержать все функции исходного ряда, а её частичные суммы будут отличаться от единичной функции (причём отличие может быть только ± 1) на множестве меры $|S_M - S'_K|$, которая стремится к нулю, поэтому перестановка σ_2 исходного ряда сходится к единичной функции.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что поскольку все функции построенного нами ряда в каждой точке $[0, 1]$ принимают только целые значения, то и любая частная сумма любой перестановки построенного ряда также будет принимать только целые значения. Из этого соображения с помощью тривиальных оценок вытекает, что функция, тождественно равная нецелому числу $\lambda \in R$ на отрезке $[0, 1]$, не принадлежит множеству сумм построенного ряда в пространстве $L_p[0, 1]$ (см.[6]), что и означает нелинейность множества его сумм в рассматриваемом пространстве.

Теорема 1 доказана.

В работе [7] автором было доказано следующее условие, обеспечивающее линейность множества сумм функционального ряда в пространствах Орлича $L^*_M(0, 1)$ (соответствующие определения можно посмотреть, например, в книге [2]:

Теорема. Пусть N -функция $M(u)$ такова, что её производная $p(u)$ выпукла вверх при $u > 0$. Тогда

условие $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 M(f_n(t)) dt < \infty$ является достаточным для линейности множества сумм ряда в пространствах $L^*_M(0, 1)$.

Изложенная в данной работе конструкция позволяет при минимальных изменениях (они касаются только определения последовательностей S_n и S'_n , которые берутся равными соответствующим частным суммам рядов с чётными и нечётными членами ряда, делённым на $M(1)$) доказать и следующий результат автора:

Теорема 2. Пусть задан произвольный положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, общий член которого $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ стремится к нулю, и произвольная N -функция $M(u)$, причём $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$. Тогда существует ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ограниченных измеримых функций, множество сумм которого нелинейно в пространстве $L^*_M(0,1)$ и $\int_0^1 M(f_n(t))dt = a_n$ при всех $n=1, 2, \dots$

Библиографический список

1. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe systeme // J.Reine Angrew.Nath., 1913, V. 143, P. 128-175; 1914, V. 144, P. 1-49; 1916, V. 146, P. 68-111
2. Красносельский, М.А., Рутцкий, Я.В. Выпуклые функции и пространства Орлича [Текст]. – М.: Физматгиз, 1958.
3. Кадец, М.И. Об условно сходящихся рядах в пространстве L_p // Успехи матем. наук, 1954. – Т. 1. – С. 107-110
4. Никишин, Е.М. Перестановки функциональных рядов // Матем. сборник, 1971. – Т. 85 (127). – С. 272-286.
5. Островский, М.И. Области сумм условно сходящихся рядов в банаховых пространствах [Текст] // Теория функций, функц. анализ и приложения. – 1986. – № 6. – С. 77-85.
6. Корнилов, П.А. О перестановках условно сходящихся функциональных рядов // Матем. сборник, 1980. – 113 (155), №4(12). – С. 598-616.
7. Корнилов, П.А. О линейности множества сумм функционального ряда // Успехи матем. наук. – 1982. – Т. 37. – Вып. 2 (224). – С. 205-206.
8. Корнилов, П.А. О теореме Римана в функциональных пространствах // Доклады Академии наук СССР, 1983, Т. 271. – №6. – С. 1310-1313.
9. Корнилов, П.А. Об условно сходящихся рядах последовательностей и функций // Сибирский матем. журнал. – 1987. – Т. XXVIII. – №3. – С. 140-148.
10. Корнилов, П.А. О множестве сумм условно сходящегося функционального ряда // Матем. сборник, 1988, 1 (9). – С. 114-127.

© Корнилов П.А., 2010

УДК 512.7

С.А.Тихомиров, А.А.Смирнова

СПЕКТРЫ СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ РАНГА 2 НА P^3 С КЛАССАМИ ЧЕРНА $c_1 = 0$ И $1 \leq c_2 \leq 19$

В настоящей работе авторами изучаются спектры стабильных векторных расслоений ранга 2 на P^3 с классами Черна $c_1 = 0$ и $1 \leq c_2 \leq 19$, в том числе для каждого $1 \leq c_2 \leq 19$ определяется точное количество реализуемых спектров.

Ключевые слова: векторные расслоения, кондиционные спектры, классы Черна, стабильное расслоение

S.A. Tikhomirov, A.A. Smirnov

SPECTRA OF STABLE STRATIFICATIONS OF A RANK 2 ON P^3 WITH CHERNA'S CLASSES $c_1 = 0$ И $1 \leq c_2 \leq 19$