учебных проектов студентов педагогических вузов с точки зрения использования доступа в данную среду. При этом интерактивная деятельность возможна как с обычных персональных компьютеров через глобальную сеть Интернет, так и с определенных представителей малых средств информатизации (мобильные телефоны, смартфоны, коммуникаторы, графические калькуляторы ([4], [5], [6])) при наличии технологии GPRS, допускающей использование протокола HTTP при работе в сети Интернет. Это в конечном итоге позволит реализовать единую среду дистанционного обучения студентов вузов, объединяющую всех участников учебного процесса вне зависимости как от наличия дисплейного класса при проведении аудиторных занятий, подразумевающих использование информационно-коммуникационных технологий в различных интерпретациях, так и географического положения участников учебного процесса при реализации самостоятельной деятельности учащихся и мониторинга учебной деятельности студентов преподавателем.

В заключение необходимо отметить, что единственной возможностью создания полноценной единой среды дистанционного обучения студентов вузов в настоящее время является только корректным образом организованный образовательных процесс на основе применения единой системы дистанционного обучения, в основе которой заложена реализация на динамическом уровне расчетных учебных проектов, с возможностью доступа к информации, с одной стороны, через локальные и глобальную сети, а, с другой стороны, через малые средства информатизации в виде сотовых телефонов, смартфонов и коммуникаторов.

Библиографический список

1. Информационные и коммуникационные технологии в образовании [Текст]: учеб.-метод. пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кривцова. – М.: Дрофа, 2008 – 312 с.
2. Сравнительный анализ СДО MOODLE и портала «Виртуальный Университет» для тестирования студентов / П.А. Голобородько, И.А. Коржик, А.А. Кузнецов, А.П. Толстобров.
3. Веллинг, Л., Томсон, Л. Разработка Web-приложений с помощью PHP и MySQL, 2-е изд.: пер. с англ. – М.: Издательский дом “Вильямс”, 2003. – 800 с.: ил. – Парал. тит. англ.
4. Богун, В.В., Смирнов, Е.И. Наглядное моделирование в обучении математике будущих учителей с использованием малых форм информатизации [Текст] // Ярославский педагогический вестник.– 2009 – № 4. – 6 с.
5. Богун, В.В., Смирнов, Е.И. Использование графического калькулятора в обучении математике [Текст]: учеб. пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – 231 с.
6. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст] / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль, 2007. – 454 с.

УДК 519.85

Н.П. Федотова

О РАССТОЯНИИ ДО ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ В СИММЕТРИЧЕСКИХ НОРМАХ

Данная работа посвящена изучению расстояния до гиперплоскостей в пространстве Rn с различными симметрическими нормами. Описаны все гиперплоскости, для которых точка минимума евклидовой нормы является точкой минимума любой другой симметрической нормы.

Ключевые слова: Норма, евклидова норма, симметрическая норма, расстояние, гиперплоскость, расстояние до гиперплоскости, уравнение гиперплоскости, класс гиперплоскостей, пространство, нормированное векторное пространство, пространство Rn, точка минимума нормы.

N.P. Fedotova

ABOUT DISTANCE TO HYPERPLANES IN SYMMETRIC NORMS

This paper is concerned with the minimum distance between a point and a hyperplane in Rn vector space supplied with different symmetrical norms. We find all hyperplanes where the nearest point in Euclidean norm is also one of the nearest points in any symmetrical norm.

Keywords: Norm, Euclidean norm, symmetrical norm, distance, hyperplane, the distance between a point and a hyperplane, hyperplane equation, class of hyperplanes, space, normed vector space, Rn space.

Введение

Известно [1] следующее свойство гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ n-мерного пространства: для любого многогранника в этой плоскости вида ai ≤ xi ≤ bi (i = 1,2,…,n) существует точка этого многогранника , в которой достигается минимум любой симметрической нормы.

Данное свойство может быть использовано при решении различных дискретных задач с соответствующим условием [2, 3], так как существование единой экстремали симметрических пространств позволяет для ее отыскания выбрать удобный критерий оптимизации. Например, это свойство может быть использовано при решении задачи о равномерном назначении, классической задачи о целочисленном сбалансировании матрицы, задачи о целочисленном сбалансировании трехмерной матрицы и др.

Будем говорить, что свойство U выполнено для гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), если точка этой гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметрической нормы.

Замечание 1.

Гиперплоскость (и многогранник в гиперплоскости) в евклидовой норме имеет единственную точку экстремума. Поэтому определение свойства U корректно.

Замечание 2.

Гиперплоскость $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ обладает свойством U. Следовательно, гиперплоскость $\sum_{i=1}^{n} kx_i = 0$ тоже обладает свойством U. Чтобы не делать эту оговорку каждый раз, будем считать, что в уравнении гиперплоскости есть хотя бы один коэффициент, равный единице (поскольку все коэффициенты не могут быть равны нулю одновременно по определению гиперплоскости).

В данной работе исследуются:

- все гиперплоскости в пространстве Rn, обладающие свойством U. (Раздел «Гиперплоскости, обладающие свойством U»);
- возможность расширения класса гиперплоскостей, обладающие свойством U, за счет наложения ограничений на симметрическую норму. (Раздел «Специальная симметрическая норма»).

Теорема 1. Любая гиперплоскость n-мерного пространства, обладающая свойством U, имеет вид (1) либо (2):

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = const, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \quad (2)$$

где (αi∈{-1,0,1}, i=1,2,…,n и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ =0, то есть количество коэффициентов равных единице, равно количеству коэффициентов, равных минус единице). И каждая гиперплоскость n-мерного пространства, имеющая вид (2) либо (3), обладает свойством U.

Теорема 2. Любая гиперплоскость, обладающая свойством U, n-мерного пространства со специальной симметрической нормой имеет вид (3). Справедливо обратное утверждение.

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = const$$, где ($\alpha i \in \{-1,0,1\}$, i=1,2,…,n). (3)

Вспомогательные утверждения

Утверждение 1.

Квадратичная форма (4) порождает симметрическую норму в R^n.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} x_i x_j \qquad (4)$$

Утверждение 2.

В евклидовой норме в пространстве R^n минимум расстояния от начала координат до плоскости $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = const, \sum_{i-1}^{n}\alpha_i^{\ 2} \neq 0$ достигается в точке

E= $(c\alpha_1; c\alpha_2; ..., c\alpha_n), где\_c = const / \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\ 2}$.

Доказательство утверждения 1.

Квадратичную форму (1) при n>2 можно представить как линейную комбинацию α* $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ + β* $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i + x_j)^2$,

где α=(n -3)/(2*n-4) и β=1/(2*n-4).

Значит, она не может принимать отрицательные значения, а все комбинации во второй сумме не могут обращаться одновременно в 0 при n>2 и нетривиальном наборе xi.

Следовательно, квадратичная форма (4) определяет в R^n положительно определённое скалярное произведение, а если из неё извлечь корень, то мы получим симметричную норму в R^n. Будем обозначать эту норму N*. Норма N* потребуется нам для построения контрпримеров, для нахождения плоскостей, не обладающих свойством U.

Доказательство утверждения 2.

Вектор градиента евклидовой нормы совпадает по направлению с радиус-вектором. В точке минимума он должен быть ортогонален плоскости, т.е. совпадать с нормальным вектором.

Гиперплоскости, обладающие свойством U

Доказательство теоремы 1 вытекает из справедливости нижеследующих лемм.

Лемма 1.1. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = const$ (αi∈R, i=1,2,…,n и ∃ i, j: |αi| > |αj| > 0) пространства Rn не обладают свойством U.

Следствие 1.1. Коэффициентами гиперплоскостей, обладающих свойством U, могут быть только -1,0,1.

Лемма 1.2. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$ пространства Rn обладают свойством U.

Лемма 1.3. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ ($\alpha i \in \{0,1\}$, i=1,2,…,n, $\exists$ i: αi=0) пространства Rn не обладают свойством U.

Лемма 1.4. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ ($\alpha i \in \{-1,0\}$, i=1,2,…,n, $\exists$ i: αi=0) пространства Rn не обладают свойством U.

Лемма 1.5. Гиперплоскости вида (3) пространства Rn обладают свойством U.

Лемма 1.6. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ ($\alpha i \in \{-1,0,1\}$, i=1,2,…,n, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$) пространства Rn не обладают свойством U.

Доказательство 1.1.

1. Без ограничения общности можно считать, что i =1, j =2.

2. Согласно утверждению 2, минимум евклидовой нормы достигается в точке E= $(c\alpha_1; c\alpha_2; ..., c\alpha_n), где\_c = const / \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{\,2}$.

3. Изменим первые две координаты на $(c\alpha_1 + \delta\alpha_2; c\alpha_2 - \delta\alpha_1; ...)$, где δ –мало и совпадает по знаку с α1α2. Тогда евклидова норма вырастет, а норма N* уменьшится, хотя новая точка лежит в той же плоскости.

Доказательство 1.2. Доказательство проведем методом от противного

1. Согласно утверждению 2, минимум евклидовой нормы достигается в точке E=(c,c,…c), где c= const /n.

2. Предположим противное. Тогда найдутся такие точка F и норма N, что N(F)<N(E). Пусть F=(x1*,x2*,…xn*). Обозначим F1=F; F2=(x2*, x3*,…xn*, x1*); F3=(x3*, x4*,… xn*, x1*, x2*); Fn=(xn*, x1*, x2*,…xn-1*).

3. Из симметричности нормы имеем: N(F1)= N(F2)=…= N(Fn).

4. Из свойства 3 нормы (неравенство треугольника) имеем: N ($\sum_{i=1}^{n} F_i$) <= $\sum_{i=1}^{n} N(F_i)$.

5. Тогда n*N(E)=N ($\sum_{i=1}^{n} F_i$) <= $\sum_{i=1}^{n} N(F_i)$ =n*N(F), N(E)<=N(F) и получаем противоречие.

Доказательство 1.3.

1. Без ограничения общности можно считать, что первые k координат равны единице, а остальные равны нулю, k<n.

2. Согласно утверждению 2, минимум евклидовой нормы достигается в точке E=(c,c,…c,0,… 0), где c=1/k.

3. Рассмотрим точку F=(c,c,…c,-δ,0,…0), где δ –мало и положительно. Тогда евклидова норма вырастет, а норма N* уменьшится, хотя новая точка лежит в той же плоскости.

Доказательство 1.4.

Умножим уравнение плоскости на минус единицу и воспользуемся леммой 1.4.

Доказательство 1.5. Доказательство проведем методом от противного

Без ограничения общности можно считать, что первые k координат равны единице, следующие k координат равны минус единице, а остальные равны нулю.

Согласно утверждению 2, минимум евклидовой нормы достигается в точке E=(c,c,…c,-c,-c, …-c,0,…0), где c==1/(2*k).

Предположим противное. Тогда найдутся такие точка F и норма N, что N(F)<N(E). Пусть F=(x1*,x2*,…xk*, xk+1*,xk+2*,…x2*k*, x2*k+1*,x2*k+2*,…xn*).

Обозначим:

F1=(x1*, x2*,…xk*, xk+1*,xk+2*,…x2*k*, x2*k+1*,x2*k+2*,…xn*)=F;

F2=(x2*,…xk*, x1*, xk+2*,xk+3*,…xk+1*, x2*k+1*,x2*k+2*,…xn*);

…………………….

Fk=(xk*,x1*,…xk-1*, x2*k*,xk+1*,…x2*k-1*, x2*k+1*,x2*k+2*,…xn*);
Fk+1=(-xk+1*,-xk+2*,…-x2*k*, -x1*, -x2*,…-xk*, -x2*k+1*,-x2*k+2*,…-xn*);
Fk+2=(-xk+2*,-xk+3*,…-xk+1*, -x2*,…-xk*, -x1*, -x2*k+1*,-x2*k+2*,…-xn*);
…………………….
F2*k=(-x2*k*,-xk+1*,…-x2*k-1*, -xk*,-x1*,…-xk-1*, -x2*k+1*,-x2*k+2*,…-xn*);

2*k*N(E)=N ($\sum_{i=1}^{2*k} F_i$), поскольку любая (сумма для каждого столбца) координата равна ±(x1*+x2+…+xk*-xk+1-xk+2-…-x2*k*), а это выражение равно ±const из уравнения плоскости.

Из симметричности и однородности нормы имеем: N(F1)= N(F2)=…= N(Fn).

Из свойства 3 нормы (неравенство треугольника) имеем: N($\sum_{i=1}^{2*k} F_i$)<= $\sum_{i=1}^{2*k} N(F_i)$.

Тогда 2*k*N(E)=N ($\sum_{i=1}^{2*k} F_i$) <= $\sum_{i=1}^{2*k} N(F_i)$ =2*k*N(F), N(E)<=N(F) и получаем противоречие.

Доказательство 1.6.

1. Без ограничения общности можно считать, что первые k координат равны единице, следующие l координат равны минус единице, а остальные равны нулю, $k > l$ >0.

2. Согласно утверждению 2, минимум евклидовой нормы достигается в точке E=(c,c,…c,-c,-c,…-c,0,…0), где c=1/(k+ l).

3. Рассмотрим точку F=(c-δ,c,…c,-c-δ,-c,…-c,0,…0), где δ –мало и положительно. Тогда евклидова норма вырастет, а норма N* уменьшится, хотя новая точка лежит в той же плоскости.

Специальная симметрическая норма

Специальной симметрической нормой Ns назовем норму, обладающую свойством: ||(|x1|,|x2|,…|xn|)||=||(xξ1, xξ2,… xξn)|| для любой перестановки ξ.

Ограничение не сильно сужает класс исследуемых задач. Например, все нормы Lp являются специальными симметрическими нормами.

Будем говорить, что свойство Us выполнено для гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), если точка этой гиперплоскости (или многогранника в гиперплоскости), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой специальной симметрической нормы.

Доказательство теоремы 2 вытекает из справедливости нижеследующих лемм.

Лемма 2.1. Гиперплоскости вида (4) пространства Rn обладают свойством Us.

Лемма 2.2. Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ (αi∈R, i=1,2,…,n и ∃ i, j: |αi| > |αj| > 0) пространства Rn не обладают свойством Us.

Доказательство 2.1.

Гиперплоскости вида $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ (αi=1, i=1,2,…,n) обладают свойством U (лемма 1.2.), значит, они тем более обладают и свойством Us, поскольку специальные симметрические нормы это подмножество всех симметрических норм.

Докажем, что гиперплоскости вида (5) обладают свойством Us

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const \quad (\alpha i \in \{0,1\},\ i=1,2,\dots,n) \qquad (5)$$

Ns(0,x)<= Ns(0.5*a,0.5*x)+Ns(-0.5*a,0.5*x) = 0.5*Ns(a,x)+0.5*Ns(-a,x) = 0.5*Ns(a,x) +0.5*Ns(a,x) = Ns(a,x). Тогда мы можем перейти в пространство меньшей размерности, где применим пункт 1.

Докажем, что гиперплоскости вида (6) обладают свойством Us

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = const$$

($\alpha i \in \{0,1,-1\}$, i=1,2,…,n): (6)

уравнение вида (6) можно преобразовать к уравнению вида (5) заменой соответствующих координат xi на -xi. Такая замена допустима, поскольку Ns(x1, x2,…, xi, …xn)= Ns(x1, x2,…, -xi, …xn) по определению.

Доказательство 2.2.

Согласно утверждению 1, минимум евклидовой нормы достигается в точке E= $(c\alpha_1; c\alpha_2; ..., c\alpha_n),\text{где}\_c = const / \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}$.

L1(E)=|const|* $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \,/\, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}$

Рассмотрим точку F=(0,…0,sign(amax)*const/amax,0…0), где amax – максимальная по модулю координата и выражение const/amax берется с тем же знаком, что и amax.

L1(F)=|const|/| amax |.

Убедимся, что L1(E) > L1(F), т.е. |const|* $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \,/\, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}$ > |const|/| amax |. Во-первых, можно разделить обе части неравенства на |const|, т.к. случай const=0 уже известен [1]. Во-вторых, если $\exists$ i, j: |αi| > |αj| > 0, то | amax |* $\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \,/\, \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2}$ > 1. что и требовалось доказать.

Библиографический список

1. Рублев, В.С., Чаплыгина, Н.Б. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах [Текст] // ДАН. – 2006. – Т. 407. – № 2. – С. 176–178.
2. Коршунова, Н.М., Рублев, В.С. Задача целочисленного сбалансирования матрицы [Текст] // Современные проблемы математики и информатики – Вып. 3. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2000. – С. 145-150.
3. Рублев, В.С., Чаплыгина, Н.Б. Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении [Текст] // Дискретная математика. – 2005. – Т. 17. – Вып. 4. – С. 150-157.