ЯРОСЛАВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК.
Серия «Физико-математические и естественные науки». Вып. 2-2010

УДК 517.5

И.Е. Преображенский

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ СУММ РИМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ИЗ $LIP(,P)$

На основе нового подхода для пространств $Lip(\alpha, p)$ даётся оценка скорости сходимости сумм Римана на «массивном» множестве. С использованием этого результата получены достаточные условия сходимости сумм Римана к интегралу Лебега почти всюду.

Ключевые слова: суммы Римана, симметричные пространства, модуль непрерывности.

I.E. Preobrazhensky

SUFFICIENT CONDITIONS OF CONVERGENCE OF RIMAN"S SUMS FOR FUNCTIONS FROM $Lip(\alpha, p)$

On the basis of the new approach for spaces $Lip(\alpha, p)$ the estimation of speed of convergence of the sums of Rimana on «massive» set is given. With use of this result sufficient conditions of convergence of the sums of Rimana to integral of Lebega almost everywhere are received.

Keywords: the sums of Rimana, symmetric spaces, the continuity module

Пусть D — измеримое множество. Через $\chi(D)$ будем обозначать его характеристическую функцию, а через $\mu(D)$ его меру Лебега. Пусть I — единичный отрезок в R, а $S(\mu)$ — множество измеримых функций на I. Далее в работе все функции будут считаться периодическими с периодом 1, то есть точки 0 и 1 мы отождествляем.

Определение. *Пространством Лебега $L_p(I)(1 \le p \le \infty)$ называется банахово пространство измеримых функций, норма в котором задаётся равенством*

$$\|f|L_p(I)\| = \begin{cases} \left(\int_I |f(s)|^p \, ds\right)^{1/p}, \text{ при } 1 \le p < \infty, \\ sup\,|f(s)|, \text{ при } p = \infty. \end{cases}$$

Напомним, что оператор $T : L_p(I) \to S(\mu)$ называется квазилинейным, если для всех $f_0, f_1 \in L_p(I), \alpha, \beta \in R$ и для любого $x \in I$ выполнено неравенство

$$|T\{\alpha f_0 + \beta f_1\}(x)| \le |\alpha| \, |T\{f_0\}(x)| + |\beta| \, |T\{f_1\}(x)|.$$

Пусть $f \in L_p(I), T$— квазилинейный оператор, $T : L_p(I) \to S(\mu)$, и задано $\alpha > 0$. Положим

$$D(Tf, \alpha) = \{x : |Tf(x)| > \alpha\}.$$

Для каждой действительной функции с периодом 1 определим модуль непрерывности

$$\omega(f, h; L_p) = \sup_{0<\delta\le h} \|f(\cdot + \delta) - f(\cdot)|L_p\|.$$

Пусть $p \in [1, \infty)$ и $\alpha \in (0, 1]$. Через $Lip(\alpha, p)$ обозначим пространство периодических функций $f \in L_p(I)$, для которых выполняется неравенство $\omega(f, h; L_p(I)) \le ch^\alpha$.

Рассмотрим оператор сумм Римана

$$R_n f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}),\ x\in I.$$

В 1940 году Марцинкевич и Салем, используя разложение функции в ряд Фурье, получили следующую теорему:

Теорема ([7]). *Пусть $\alpha > 0$ и $f \in Lip(\alpha,2)$. Тогда почти всюду выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} R_n f(x) = \int_0^1 f(s)ds, \tag{1}$$

где справа стоит интеграл Лебега от f.

Позднее, в 1950 году, используя теорему вложения Харди-Литлвуда [8] и вышеупомянутую теорему Марцинкевича-Салема, C. Яно получил следующий результат:

Теорема ([3]). *Пусть $0<\epsilon<\frac{1}{2},\ 1<p\le 2,\ 0<\alpha\le 1$, и $f\in Lip(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}+\epsilon,p)$. Тогда почти всюду выполняется равенство (1).*

В той же статье с использованием приближения функций $R_n f(x)$ тригонометрическими полиномами была доказана следующая теорема:

Теорема ([3]). *Пусть $0<\alpha\le 1$ и $f\in Lip(\alpha,1)$. Пусть дана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1,n_2,\dots,n_k,\dots$ такая, что справедливо соотношение $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k^{\alpha}<\infty$, тогда почти всюду выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty} R_{n_k} f(x) = \int_0^1 f(s)ds. \tag{2}$$

Некоторые результаты, близкие к данным, приведены в [4].

В настоящей работе показано, что для случая $p>1$ условия, приведённые в вышеупомянутых теоремах, могут быть существенно улучшены.

Нам потребуются некоторые предварительные построения.

Лемма 1. *Пусть $f\in L_p(I), f(x)\ge 0$ п.в. и задано $\alpha>0$. Тогда справедливо неравенство $\mu(D(R_n f,\alpha))^{1/p}\le \alpha^{-1}\left\|f|L_p(I)\right\|$.*

Доказательство

Заметим, что для любой функции $f\in L_p(I)$ выполняется неравенство $\left\|R_n f(x)|L_p(I)\right\|\le \left\|f(x)|L_p(I)\right\|$. Дальнейшее доказательство леммы проводится непосредственными вычислениями.

Лемма 2. *Пусть дана абсолютно непрерывная функция f такая, что f' принадлежит $L_p(I)$. Зафиксируем $\gamma>0$ и натуральные числа n и m. Тогда существует множество U_γ, такое, что выполнены условия:*

a) для любого $x\in I\setminus U_\gamma$, выполняется неравенство $|R_n f(x)-R_{nm}f(x)|\le\frac{\gamma}{2n}$;

b) для меры множества U_γ справедлива оценка $\mu(U_\gamma)^{1/p}\le c_0\gamma^{-1}\left\|f'|L_p(I)\right\|$.

Доказательство

Будем обозначать через $B(x)$ совокупность всех интервалов на I, содержащих x. Пусть $f\in L_1(I)$. Определим максимальный оператор следующим равенством:

$$Mf(x)=\left\{\sup_{B\in B(x)}\frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(s)|\,ds\right\}.$$

Для него хорошо известно [6], что для любого $\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\mu\left(D(Mf,\alpha)\right) \le c\alpha^{-1} \int\limits_{D(Mf,\alpha)} f(s)ds, \tag{3}$$

где константа c не зависит от выбора функции $f \in L_1(I)$ и α.

Положим $U_\gamma = \left\{x \in I : MR_n f'(x) > \gamma\right\}$.

Заметим, что если $x_1 \in I \setminus U_\gamma$, то для любого x_2 выполняются соотношения

$$\frac{|R_n f(x_2) - R_n f(x_1)|}{|x_2 - x_1|} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|x_2 - x_1|} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_2 + \frac{i}{n}) - f(x_1 + \frac{i}{n}) \right) \right| \le$$

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|x_2 - x_1|} \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_1}^{x_2} f'(s + \frac{i}{n}) ds \right| \le \frac{1}{|x_2 - x_1|} \int_{x_1}^{x_2} \left| R_n f'(s) \right| ds \le \gamma.$$

Следовательно, если $x \in I \setminus U_\gamma$, то

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \le \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left| R_n f(x) - R_n f(x + \frac{j}{nm}) \right| \le \frac{m(m-1)}{2nm^2} \gamma \le \frac{\gamma}{2n}.$$

Утверждение 2 следует из неравенства (3), леммы 1 и неравенства Гёльдера.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $f \in L_p(I)$, $f(x) \ge 0$ *п.в. и задано* $\alpha > 0$. *Положим* $O_\alpha = \{x : |R_n f(x)| > \alpha\} \cup \{x : |R_{nm} f(x)| > \alpha\}$, *тогда выполняются два условия:*

a) для любого $x \in I \setminus O_\alpha$ *выполняется неравенство* $|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \le 2\alpha$;

b) для меры множества O_α *справедлива оценка* $\mu(O_\alpha)^{1/p} \le \frac{2}{\alpha} \|f|L_p(I)\|$.

Доказательство

Первое условие очевидно. Для доказательства второго, используя то, что $t^{1/p}$ — возрастает, полуаддитивна (это свойство следует из квазивогнутости функции (см., например, [5])) и лемму 1, получаем цепочку неравенств

$$\mu(O_\alpha)^{1/p} \le \left(\mu(\{x : |R_n f(x)| > \alpha\}) + \mu(\{x : |R_{nm} f(x)| > \alpha\})\right)^{1/p} \le$$

$$\mu(\{x : |R_n f(x)| > \alpha\})^{1/p} + \mu(\{x : |R_{nm} f(x)| > \alpha\})^{1/p} \le \frac{2}{\alpha} \|f|L_p(I)\|.$$

Лемма полностью доказана.

Теорема 1. *Пусть* $0 < \alpha \le 1$, $1 < p < \infty$ *и* $f \in Lip(\alpha, p)$. *Зафиксируем* $n, m \in N$ *и действительное число* $\epsilon > 0$. *Выберем последовательности* $\delta_i \downarrow 0$ *и* $\epsilon_i \downarrow 0$ *так, чтобы выполнялись условия*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon_i < \epsilon, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i^\alpha}{\epsilon_i^{1/p}} < \infty, \tag{5}$$

и построим функцию

$$\Omega_\epsilon(h, L_p) = \inf_k \left\{ h \sum_{i=1}^{k} \frac{\delta_{i+1}^\alpha}{\delta_{i+1}\epsilon_i^{1/p}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{\delta_i^\alpha}{\epsilon_i^{1/p}} \right\}.$$

Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует множество W, $\mu(W) < \epsilon$ такое, что для каждого $x \in I \setminus W$ выполняется

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \le c_1 \Omega_\epsilon(\frac{1}{n}, L_p),$$

где константа c_1 не зависит от f, n, m, ϵ, x.

Доказательство

Положим

$$f_\delta(t) = \frac{1}{2\delta} \int_{t-\delta}^{t+\delta} f(s) ds.$$

Представим f как сумму гладких функций:

$$f(t) = f_{\delta_1}(t) + (f_{\delta_2}(t) - f_{\delta_1}(t)) + \dots + \left(f_{\delta_k}(t) - f_{\delta_{k-1}}(t)\right) + \dots$$

Для каждого $i \in N$ определим функции $g_i(t)$ равенствами

$$g_i(t) = f_{\delta_{i+1}}(t) - f_{\delta_i}(t),$$

$$f(t) = f_{\delta_1}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} g_i(t). \tag{6}$$

Тогда справедливы оценки [1]:

$$\|g_i | L_p(I)\| \le 2\delta_i^\alpha, \tag{7}$$

$$\left\|g_i^{'} | L_p(I)\right\| \le \frac{3}{\delta_{i+1}^{1-\alpha}}. \tag{8}$$

Заметим, что из (5) и (7) следует, что ряд, стоящий в правой части второго равенства в (6), сходится в $L_p(I)$ к $f(t)$.

Определим теперь последовательности α_i и γ_i следующими равенствами

$$\frac{\epsilon_i^{1/p}}{2} = \frac{4\delta_i^\alpha}{\alpha_i}, \tag{9}$$

$$\frac{\epsilon_i^{1/p}}{2} = \frac{3c_0}{\gamma_i \delta_{i+1}^{1-\alpha}}. \tag{10}$$

Для каждого i положим $\gamma = \gamma_i$. Применим лемму 2 для функций $g_i(t)$, образуем множества U_i. Аналогично, полагая $\alpha = \alpha_i$ и используя лемму 3 для функций $g_i(t)$, получим множества O_i.

Определим множества равенствами $W_i = U_i \cup O_i$ и $W = \bigcup W_i$, тогда, используя полуаддитивность функции $t^{1/p}$, лемму 2 и лемму 3, а затем (7), (8), (9) и (10), получим цепочку неравенств

$$\mu(W_i)^{1/p} \leq \mu(U_i)^{1/p} + \mu(O_i)^{1/p} \leq \frac{c_0}{\gamma_i} \left\| g_i^{'} | L_p(I) \right\| + \frac{2}{\alpha_i} \| g_i | L_p(I) \| = \frac{3c_0}{\gamma_i \delta_{i+1}^{1-\alpha}} + \frac{4\delta_i^\alpha}{\alpha_i} = \epsilon_i^{1/p}.$$

Следовательно, для любого i выполняется соотношение $\mu(W_i) \leq \epsilon_i$. Используя теперь условие (4), получаем, что $\mu(W) < \epsilon$.

Пусть $x \in I \setminus W$, тогда, используя (6), лемму 2, лемму 3 и равенства (9) и (10), получим цепочку неравенств

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \leq |R_n f_{\delta_1}(x) - R_{nm} f_{\delta_1}(x)| + \sum_{i=1}^{\infty} |R_n g_k(x) - R_{nm} g_k(x)| \leq$$

$$|R_n f_{\delta_1}(x) - R_{nm} f_{\delta_1}(x)| + \sum_{i=1}^{\infty} \min \left\{ \frac{\gamma_i}{2n}, 2\alpha_i \right\} \leq$$

$$|R_n f_{\delta_1}(x) - R_{nm} f_{\delta_1}(x)| + \sum_{i=1}^{\infty} \min \left\{ \frac{3c_0 \delta_{i+1}^\alpha}{n \delta_{i+1} \epsilon_i^{1/p}}, 16 \frac{\delta_i^\alpha}{\epsilon_i^{1/p}} \right\}$$

Положим $c_1 = \max\{3c_0, 16\}$, $\delta_1 = 0,5$. Тогда выполняются следующие неравенства

$$|R_n f(x) - R_{nm} f(x)| \leq c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \min \left\{ \frac{\delta_{i+1}^\alpha}{n \delta_{i+1} \epsilon_i^{1/p}}, \frac{\delta_i^\alpha}{\epsilon_i^{1/p}} \right\} \leq c_1 \Omega_\epsilon(\frac{1}{n}, L_p).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть даны положительные действительные числа ϵ, γ и натуральное число n. Тогда величина $\Omega_\epsilon(\frac{1}{n}, L_p)$ допускает следующую оценку*

$$\Omega_\epsilon(\frac{1}{n}, L_p) \leq c_3 \frac{\ln^{\frac{1+\gamma}{p}} n}{n^\alpha \epsilon^{1/p}}, \tag{11}$$

где константа c_3 не зависит от n, p и ϵ.

Доказательство

Определим последовательность $\{\epsilon_i\}$ равенствами $\epsilon_i = c_\gamma i^{-1-\gamma} \epsilon$, где $c_\gamma = \left(\sum_{i=1}^\infty i^{-1-\gamma}\right)^{-1}$. Положим $\delta_i = \frac{1}{2^i}$, тогда выполняются соотношения

$$\Omega_\epsilon(\frac{1}{n}, L_p) = \inf_k \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} \frac{2^{-\alpha i}}{2^{-i} \epsilon_i^{1/p}} + \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{2^{-\alpha i}}{\epsilon_i^{1/p}} \right\} \leq c_2 \inf_k \left(\frac{1}{n} 2^{k(1-\alpha)} \frac{1}{\epsilon_k^{1/p}} + 2^{-\alpha k} \frac{1}{\epsilon_k^{1/p}} \right)$$

Взяв $k = [\log_2 n] + 1$, получаем требуемое неравенство.

Теорема 2. *Пусть $0 < \alpha \leq 1$, $1 < p < 2$ и $f(x) \in Lip(\alpha, p)$. Пусть дана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, такая, что для некоторого $\beta > 0$ выполняется соотношение*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^{1+\beta} n_k}{n_k^{\alpha p}} < \infty.$$

Тогда почти всюду выполняется равенство (2).

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые предварительные рассмотрения.

Пусть определена последовательность $\{\tau_k\}$, удовлетворяющая двум условиям:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \tau_k < \infty$;

b) последовательность чисел $\left\{\Omega_{\tau_m}(\frac{1}{n_m}, L_p)\right\}$ убывает с ростом m и стремится к нулю.

Тогда справедливы следующие три леммы.

Лемма 4. *Пусть даны натуральные числа k и i. Определим множества при помощи равенств*

$$W(k,i) = \left\{x : |R_{n_k} f(x) - R_{n_j} f(x)| \le 2c_1 \Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p) \text{ для } \forall j = \overline{k+1, k+i}\right\}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\mu(W(k,i)) \ge 1 - \sum_{j=k+1}^{k+i} \tau_j.$$

Доказательство

Положим $N_{k,i} = n_k \cdot n_{k+1} \cdot \dots \cdot n_{k+i}$ и $W_j = \left\{x : |R_{n_j} - R_{N_{k,i}}| \le c_1 \Omega_{\tau_j}(\frac{1}{n_j}, L_p)\right\}$. Применяя теорему 1, получаем, что для мер данных множеств справедлива оценка $\mu(W_j) \ge 1 - \tau_j$. Следовательно, выполняется соотношение

$$\mu(\bigcap_{j=k+1}^{k+i} W_j) \ge 1 - \sum_{j=k+1}^{k+i} \tau_j. \tag{12}$$

Пусть $x \in \bigcap_{j=k+1}^{k+i} W_j$. Тогда из убывания последовательности $\left\{\Omega_{\tau_m}(\frac{1}{n_m}, L_p)\right\}$ следует, что справедлива цепочка неравенств

$$|R_{n_k} f(x) - R_{n_j} f(x)| \le |R_{n_k} f(x) - R_{N_{k,i}} f(x)| + |R_{N_{k,i}} f(x) - R_{n_j} f(x)| \le$$

$$c_1 \left(\Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p) + \Omega_{\tau_j}(\frac{1}{n_j}, L_p)\right) \le 2c_1 \Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p). \tag{13}$$

Из соотношения (13) следует, что $\bigcap_{j=k+1}^{k+i} W_j \subset W(k,i)$.

Лемма полностью доказана.

Лемма 5. Определим множества с помощью равенства

$$W(k) = \bigcap_{i=1}^{\infty} W(k,i).$$

Тогда выполняются два условия:

a) если $x \in W(k)$, то для любых $l, m > k$ выполняется неравенство

$$|R_{n_l} f(x) - R_{n_m} f(x)| \le 4c_1 \Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p); \tag{14}$$

b) справедливы соотношения

$$\mu(W(k)) \geq 1 - \sum_{j=k+1}^{\infty} \tau_j. \tag{15}$$

Доказательство

Первое условие следует из леммы 4 и неравенства

$$|R_{n_l}f(x) - R_{n_m}f(x)| \leq |R_{n_l}f(x) - R_{n_k}f(x)| + |R_{n_m}f(x) - R_{n_k}f(x)|$$

Для доказательства второго условия заметим, что справедливо вложение $W(k, i+1) \subset W(k, i)$, и поскольку мера Лебега непрерывна, то выполняется соотношение

$$\mu(W(k)) = \lim_{i\to\infty} \mu(W(k,i)) \geq 1 - \sum_{i=k+1}^{\infty} \tau_i.$$

Лемма полностью доказана.

Лемма 6. *Положим $W = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} W(k)$. Тогда выполняются два условия:*

a) если $x \in W$, то последовательность чисел $\{R_{n_k}f(x)\}$ сходится;

b) для меры множества W справедливо равенство $\mu(W) = 1$.

Доказательство

Для доказательства первого утверждения заметим, что если $x \in W$, то существует возрастающая последовательность натуральных чисел $k_1, k_2, \ldots$, такая, что $x \in W(k_1), x \in W(k_2), \ldots$. Значит, из условия (14) леммы 5 и того факта, что $\Omega_{\tau_m}(\frac{1}{n_m}, L_p) \to 0$, получим, что для последовательности чисел $\{R_{n_k}f(x)\}$ выполняются условия Коши, следовательно, она сходится.

Для доказательства второго утверждения заметим, что из сходимости ряда $\sum \tau_i$, соотношения (15) и непрерывности меры Лебега следует, что $\mu(\bigcup_{k=i}^{\infty} W(k)) = 1$. Поэтому $\mu(W) = 1$.

Лемма полностью доказана.

Доказательство теоремы 2

Зафиксируем действительное число $\gamma \in (0;\beta)$. Подставляя в (11) в качестве ϵ числа $\tau_k = (\ln^{1+\beta} n_k)/n_k^{\alpha p}$, получим, что для любого натурального числа k справедливо неравенство

$$\Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p) \leq c_3 \ln^{\frac{\gamma-\beta}{p}} n_k. \tag{16}$$

Заметим, что в силу соотношения (16) и выбора последовательности $\{\tau_k\}$ при замене в леммах 4-6 величины $\Omega_{\tau_k}(\frac{1}{n_k}, L_p)$ на $c_3 \ln^{\frac{\gamma-\beta}{p}} n_k$ утверждения останутся справедливыми.

Так как ряд $\sum \tau_k$ сходится и последовательность $c_3 \ln^{\frac{\gamma-\beta}{p}} n_k$ монотонно стремится к нулю то, применяя леммы 4-6, получим, что на множестве полной меры W выполняется (2).

Теорема полностью доказана.

Автор статьи выражает глубокую признательность своему научному руководителю Е.И. Бережному за ценные идеи и полезные обсуждения.

Библиографический список

1. *Бережной, Е.И.* Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств [Текст] // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60, № 2. – С. 3–20.
2. *Крейн, С.Г., Петунин, Ю.И., Семенов, Е.М.* Интерполяция линейных операторов [Текст] . – М.: Наука, 1977.
3. *Yano S.* Notes on Fourier Analysis 19: A remark on Riemann sums, Tuhoku Math. J.,2, 1950, p. 1-3.
4. *Ruch J.-J., Weber M.* On Riemann sums // Note di Matematica 26, n. 2, 2006, p. 1-50.
5. *Дзядык, В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами [Текст] . – М.: Наука,1977.
6. *Стейн, И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций [Текст] . – М.: Мир, 1973.
7. J. Marcinkievicz, R. Salem: Sur les sommes riemanniennes, Comp. Math.,7, 1940, p.376-389.
8. G.H. Hardy and J.E. Littlewood, A covergence criterion for Fourier series. Mathematische Zeischrift, 28 (1928).

УДК 517.2

А.Д. Новиков

ОБ ИНСТРУМЕНТАРИИ И МЕТОДИКЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА УБЫВАНИЕ И ВОЗРАСТАНИЕ

В результате анализа существующего в настоящее время подхода к исследованию функций на убывание и возрастание в данной статье делается вывод о наличии неустранимых в рамках этого подхода противоречий. В качестве альтернативного подхода автором предлага-ются новая концепция, инструментарий и схема исследования функций на убывание и возрас-тание, отвечающая требованиям непротиворечивости и полноты теории. Новый подход приме-ним как в вузовских курсах математического анализа и высшей математики, так и в школьном курсе математики.

*Ключевые слова:*убывание функции, возрастание функции, исследование функций, методика преподавания математики.