УДК 521.3

А.С. Киселев, В.Г. Кречет

НЕКОТОРЫЕ АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ПЯТИМЕРНОЙ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

В данной работе в рамках единой пятимерной геометрической теории гравитации и электромагнетизма получен ряд решений, соответствующих наличию в пространстве-времени азимутального магнитного поля и некоторого скалярного поля геометрического происхождения. Показано, что эти поля могут индуцировать появление нетривиальной топологии пространства-времени (в виде «кротовых нор» и космических струн).

Ключевые слова: единая пятимерная теория, гравитация, электромагнетизм, «кротовая нора», космическая струна.

A.S. Kiseliov, V.G. Krechet

SOME ASTROPHYSICAL EFFECTS OF THE FIVE-MEASURED INTEGRATED THEORY OF GRAVITATION AND ELECTROMAGNETISM

In this work was received a number of solutions within a unified five-dimensional geometric theory of gravitation and electromagnetism, that corresponding to the presence in the space-time azimuthal magnetic field and a scalar field of geometric origin. It is shown that these fields can induce the appearance of a nontrivial topology of space-time (in the form of "wormholes" and cosmic strings).

Keywords: the integrated five-measured theory, gravitation, electromagnetism, «mole's hole», a space string.

Как известно, уравнения Эйнштейна в пустом пятимерном пространстве-времени с дополнительным пространственным измерением x^4

$$R_{AB} - \tfrac{1}{2} R g_{AB} = 0; \quad (A, B = 0,1,2,3,4), \tag{1}$$

с использованием монадного формализма [1] распадаются на совместную систему уравнений Максвелла-Эйнштейна в четырехмерном римановом пространстве-времени. Это достигается при условии независимости метрических коэффициентов g_{AB} от дополнительной пространственной координаты x^4 (условие цилиндричности).

При этом дополнительные недиагональные метрические коэффициенты $g_{4k} (k = 0,1,2,3)$ оказываются пропорциональны компонентам электромагнитного 4-векторного потенциала A_k, а метрический коэффициент $g_{44}(x^k)$ соответствует наличию некоторого скалярного поля геометрического происхождения.

Условие цилиндричности по пятой координате из общей группы координатных преобразований $x'^A = x'^A(x^B)$ выделяет следующие допустимые координатные преобразования

$$x'^k = x'^k (x^A); \quad x'^4 = x'^4 + f(x^k) \tag{2}$$

Здесь x^k – координаты четырехмерного пространства-времени.

В данной работе в рамках указанной выше геометрической пятимерной теории гравитации и электромагнетизма мы рассмотрим следствия этой теории, соответствующие наличию геометризированного азимутального магнитного поля и геометризированного скалярного поля $g_{44} = F(x)$ в стационарном случае. Эту задачу удобнее решать в пространстве с цилиндрической симметрией.

Такая задача о гравитационном взаимодействии азимутального магнитного поля в рамках ОТО рассматривалась ранее в работах К.А. Бронникова [2]. В данной работе мы хотим получить результаты геометрического подхода к такой задаче и сравнить их с результатами, полученными в рамках ОТО.

Пятимерную цилиндрически-симметричную метрику, соответствующую рассматриваемой задаче, берем в виде:

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + B(x)dx^2 + C(x)d\alpha^2 + D(x)dz^2 + 2E(x)dzdx^4 + F(x)(dx^4)^2 \quad (3)$$

Здесь метрический коэффициент $g_{44} = F(x)$ описывает скалярное поле геометрического происхождения, а коэффициент $g_{34} = E(x)$ соответствует компоненте магнитного потенциала, так что его производная по радиальной координате x пропорциональна напряженности азимутального магнитного поля H_α: $H_\alpha = \dfrac{E'}{2\sqrt{\chi}}$.

В пространстве-времени с метрикой (3) вакуумные уравнения Эйнштейна будут иметь вид:

$$\frac{C''}{C} + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{\Delta'^2}{2\Delta^2} - \frac{B'\Delta'}{2B\Delta} + \frac{C'\Delta'}{2C\Delta} - \frac{B'C'}{2BC} - \frac{D'F' - E'^2}{2\Delta} = 0$$

$$\frac{A'C'}{AC} + \frac{A'\Delta'}{A\Delta} + \frac{C'\Delta'}{C\Delta} + \frac{D'F' - E'^2}{\Delta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{A''}{A} + \frac{\Delta''}{\Delta} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{\Delta'^2}{2\Delta^2} - \frac{B'\Delta'}{2B\Delta} + \frac{A'\Delta'}{2A\Delta} - \frac{A'B'}{2AB} - \frac{D'F' - E'^2}{2\Delta} = 0$$

$$\frac{A''}{A} + \frac{C''}{C} + \frac{F''}{F} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{A'B'}{2AB} - \frac{B'C'}{2BC} + \frac{A'C'}{2AC} + \frac{A'F'}{2AF} + \frac{C'F'}{2CF} - \frac{B'F'}{2BF} - \frac{F'\Delta'}{2F\Delta} + \frac{D'F' - E'^2}{2\Delta} = 0$$

$$\frac{A''}{A} + \frac{C''}{C} + \frac{E''}{E} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{A'B'}{2AB} - \frac{B'C'}{2BC} + \frac{A'C'}{2AC} + \frac{A'E'}{2AE} + \frac{C'E'}{2CE} - \frac{B'E'}{2BE} - \frac{E'\Delta'}{2E\Delta} + \frac{D'F' - E'^2}{2\Delta} = 0$$

$$\frac{A''}{A} + \frac{C''}{C} + \frac{D''}{D} - \frac{A'^2}{2A^2} - \frac{C'^2}{2C^2} - \frac{A'B'}{2AB} - \frac{B'C'}{2BC} + \frac{A'C'}{2AC} + \frac{A'D'}{2AD} + \frac{C'D'}{2CD} - \frac{B'D'}{2BD} - \frac{D'\Delta'}{2D\Delta} + \frac{D'F' - E'^2}{2\Delta} = 0,$$

где $\Delta = DF - E^2$.

При решении этой системы будем использовать гармонические координаты:

$$B = AC\Delta; \quad \frac{B'}{B} = \frac{A'}{A} + \frac{C'}{C} + \frac{\Delta'}{\Delta} \quad (5)$$

Рассмотрим сначала задачу с одним лишь геометрическим скалярным полем ($E(x) = 0;\ F(x) \neq 0$). Такая задача в сферической симметрии решена ранее в работах [3].

Общее решение системы уравнений (4) для рассматриваемого случая при условии (5) следующее:

$$A(x) = e^{(m+b)x}; \quad C(x) = e^{bx}; \quad D(x) = e^{(b+k)x}; \quad (6)$$

где постоянные интегрирования a, b, k, m связаны условием:

$$(m+b)(3b+2k+a) + (b+k)(3b+k+a) + ab = 0 \quad (7)$$

Выбором констант a, b, k, m при учете условия (7) можно из общего решения (6) получить решение с плоской или струнной асимптотикой. В данном случае условия для возможности такой асимптотики следующие [2]:

$$m + b = 0; \quad b = 2; \quad \frac{C'}{4BC} \to 1 - \xi \;\; при \; x \to \infty \quad , \tag{8}$$

где ξ определяет дефект азимутального угла α .

Заменой переменной $e^{bx} = r^2, \quad 0 \le r < \infty$ общее решение (6) приводится к виду:

$$A = 1; \quad B = 1; \quad C = \left(1 - \tfrac{\xi}{2\pi}\right) r^2; \quad D = r^{2(1+\frac{k}{2})}$$
$$F = r^{-2(1+\frac{k}{2})}; \quad |k| = 2 - \tfrac{\xi}{\pi}; \tag{9}$$

Здесь при $k > -2$ имеем убывающее скалярное поле $F(x)$ при возрастающем значении радиальной координаты r . При этом имеем дефект азимутального угла, как и в случае струнного решения.

Если же выбрать постоянные интегрирования в виде:

$$a = 0; \quad b = -k; \quad k = m,$$

то получаем точное решение в виде метрики струны в 5-мерном пространстве:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + (1 - \tfrac{\xi}{2\pi})^2 r^2 d\alpha^2 + dz^2 + (dx^5)^2, \tag{10}$$

Далее рассмотрим случай наличия одного лишь геометризированного азимутального магнитного поля при отсутствии скалярного поля ($E(x) \ne 0; F(x) = 1$).

Система уравнений (4) для рассматриваемого случая при условии (5) имеет следующие первые интегралы:

$$A(x) = C(x)e^{kx}; \; E'(x) = m\Delta; \; (k, m = const, \; \Delta = D - E^2) \tag{11}$$

Так же для метрического коэффициента $C(x)$, определяющего расстояние от оси симметрии, получаем выражение вида

$$\frac{C''}{C} - \frac{C'^2}{C^2} = \frac{E'^2}{2\Delta} \tag{12}$$

Поскольку правая часть (12) положительно определена, то $C'' > 0$ при $C' = 0$, а это есть необходимое условие для существования «кротовой норы». При этом через точки, где $C' = 0$, проходит «горловина» «кротовой норы», т.е. ее самое узкое место. Таким образом, азимутальное магнитное поле H_α может образовывать «кротовые норы» в рамках рассматриваемой 5-мерной геометрической теории. Это имеет место и в обычной 4-мерной теории Эйнштейна-Максвелла [2,3].

Общее решение системы (4) с учетом (5,11,12) следующее:

$$C(x) = (x^2 + a^2)^2 x^{\frac{2(b-p)}{b}}; \quad B(x) = x^{\frac{2(k-p)}{b}};$$

$$A(x) = (x^2 + a^2)x^{\frac{2(b+k-p)}{b}}; \quad D(x) = \frac{b^2(x^2 + 4a^2)}{a^4(x^2 + a^2)^2};$$
(13)
$$E' = 2\sqrt{\chi}H_\alpha = \frac{2b^2}{a}\frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}; \quad \left(a, p = const, \quad b = \sqrt{p^2 + kp}\right)$$
$$-\infty < x < \infty$$

Заменой переменной $x^2 = r \; (0 \le r < \infty)$ для азимутального магнитного поля получим формулу:

$$E' = 2\sqrt{\chi}H_\alpha = \frac{2b^2}{a}\frac{r}{(r + a^2)^2} \tag{14}$$

Из формулы (14) видно, что оно убывает с расстоянием как $1/r$, как и в классической электродинамике, где $H_\alpha = \frac{I\mu_0}{2\pi r}$. Но, в отличие от нее, в рассматриваемой теории оно не имеет особенности на оси симметрии: $H_\alpha(r = 0) = 0$.

Из общего решения (13) выбором констант интегрирования $\left(k, a, p, b = \sqrt{p^2 + kp}\right)$ можно выделить решения для метрических коэффициентов, соответствующих геометрии пространства-времени «кротовой норы»:

$$1) \quad k = 0; \; \textit{тогда} \;\; C(x) = (x^2 + a^2)^2; \quad B(x) \equiv g_{11} = x^{-2}; \quad A(x) \equiv g_{00} = C(x)$$
$$-\infty < x < \infty \tag{15}$$

В данном решении константа интегрирования «a» определяет радиус «горловины» «кротовой норы».

$$2) \;\; k < 0; \;\; k \equiv -l^2; \;\; \frac{l^2}{p} < \frac{8}{9}; \quad x^2 = r$$

$$C(r) = \left(r^{\frac{3\sqrt{1-c^2/p}-1}{2\sqrt{1-c^2/p}}} + \frac{a^2}{r^{\frac{1-\sqrt{1-c^2/p}}{2\sqrt{1-c^2/p}}}} \right)^2 \tag{7}$$

$$A(r) = \frac{(r + a^2)^2}{r^{\frac{1+c^2/p}{\sqrt{1-c^2/p}}-1}}; \quad B(r) = r^{-\frac{(1+c^2/p)}{\sqrt{1-c^2/p}}}$$
$$0 \le r < \infty$$

Из полученных результатов видно, что скалярное поле $F(x)$ геометрического происхождения может образовывать геометрию пространства-времени с нетривиальной топологией, например в виде пространства-времени космической струны, а геометризованное азимутальное магнитное поле H_α в отсутствие геометрического скалярного поля $(g_{44}=1)$ может индуцировать образование «кротовых нор» в широком диапазоне выбора констант интегрирования, причем оно не имеет особенности на оси симметрии, а на больших расстояниях от нее оно убывает как $1/r$, то есть как в обычной электродинамике.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст]. – М.: Энергоиздат, 1982.
2. Бронников, К.А. // Изв. вузов. Физика. – 1979. – № 6. – С. 32.
3. Krechet V.G., Sadovnikov D.V. // Gravitation & Cosmology. – 2009. – V. 60. – № 4.
4. Легкий, А.И. Точное статическое сферически-симметричное решение 5-мерных уравнений Эйнштейна. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. – М.: Атомиздат, 1979. – Вып. 10. – С. 149-153.

УДК 521.3

К.К. Гасанов, А.Н. Гасанова

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе исследуется задача оптимального управления, описываемая уравнением двумерной теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. Здесь сначала обобщенное решение краевой задачи разлагается в биортогональный ряд по системе собственных и присоединенных функций несамосопряженной спектральной задачи. Задача управления с минимальной энергией сведена к проблеме моментов, и найдены достаточные условия.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, двумерная уравнения, оптимальная управления, нелокальные краевые условии, обобщенное решение, обобщенные производные, несамосопряженная задача, биортогональный ряд, собственные и присоединенные функции, спектральная задача, проблема моментов, минимальная энергия.

K.K. Hasanov, A.N. Hasanova

CONTROL WITH THE MINIMUM ENERGY FOR THE EQUATION OF THE TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

In work the problem of optimum control described by the equation of two-dimensional heat conductivity with non-local boundary conditions is investigated. Here at first the generalized decision of a boundary problem decays in byortogonal a number on system of own and attached functions of non self-interfaced spectral problem. The problem of control with the minimum energy is shown to a problem of the moments, and sufficient conditions are found.

Keywords: the heat conductivity equations, two-dimensional the equations, optimum control, non-local boundary condition, the generalized decision, the generalized derivatives, non self-interfaced problem, byortogonal a number, own and attached functions, a spectral problem, a problem of the moments, the minimum energy.

1. Постановка краевой задачи. Пусть в области $Q=\Omega x[0,T]$ управляемый процесс описывается уравнением двухмерной теплопроводности