поле H_α в отсутствие геометрического скалярного поля $(g_{44}=1)$ может индуцировать образование «кротовых нор» в широком диапазоне выбора констант интегрирования, причем оно не имеет особенности на оси симметрии, а на больших расстояниях от нее оно убывает как $1/r$, то есть как в обычной электродинамике.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст]. – М.: Энергоиздат, 1982.
2. Бронников, К.А. // Изв. вузов. Физика. – 1979. – № 6. – С. 32.
3. Krechet V.G., Sadovnikov D.V. // Gravitation & Cosmology. – 2009. – V. 60. – № 4.
4. Легкий, А.И. Точное статическое сферически-симметричное решение 5-мерных уравнений Эйнштейна. // Проблемы теории гравитации и элементарных частиц. – М.: Атомиздат, 1979. – Вып. 10. – С. 149-153.

УДК 521.3

К.К. Гасанов, А.Н. Гасанова

УПРАВЛЕНИЕ С МИНИМАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе исследуется задача оптимального управления, описываемая уравнением двумерной теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. Здесь сначала обобщенное решение краевой задачи разлагается в биортогональный ряд по системе собственных и присоединенных функций несамосопряженной спектральной задачи. Задача управления с минимальной энергией сведена к проблеме моментов, и найдены достаточные условия.

Ключевые слова: уравнения теплопроводности, двумерная уравнения, оптимальная управления, нелокальные краевые условии, обобщенное решение, обобщенные производные, несамосопряженная задача, биортогональный ряд, собственные и присоединенные функции, спектральная задача, проблема моментов, минимальная энергия.

K.K. Hasanov, A.N. Hasanova

CONTROL WITH THE MINIMUM ENERGY FOR THE EQUATION OF THE TWO-DIMENSIONAL EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY WITH NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS

In work the problem of optimum control described by the equation of two-dimensional heat conductivity with non-local boundary conditions is investigated. Here at first the generalized decision of a boundary problem decays in byortogonal a number on system of own and attached functions of non self-interfaced spectral problem. The problem of control with the minimum energy is shown to a problem of the moments, and sufficient conditions are found.

Keywords: the heat conductivity equations, two-dimensional the equations, optimum control, non-local boundary condition, the generalized decision, the generalized derivatives, non self-interfaced problem, byortogonal a number, own and attached functions, a spectral problem, a problem of the moments, the minimum energy.

1. Постановка краевой задачи. Пусть в области $Q=\Omega x\left[0,T\right]$ управляемый процесс описывается уравнением двухмерной теплопроводности

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+u(x,y,t) \text{ в } Q, \tag{1}$$

с начальными

$$z(x,y,0)=z_0(x,y),\ (x,y)\in\Omega=\{0<x<1;0<y<1\}, \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} z(0,y,t)=0,\quad z_x(0,y,t)=z_x(1,y,t),0<y<1,0<t<T,\\ z(x,0,t)=0,\quad z_y(x,0,t)=z_y(x,1,y),0<x<1,0<t<T, \end{aligned} \tag{3}$$

где $z_0(x,y)-$начальное распределение температуры $u(x,y,t)-$плотность тепловых источников в точке (x,y) в момент времени t.

Управляющим параметром является мощность внутренних источников нагрева $u(x,y,t)$. Класс допустимых управлений состоит из функций $u(x,y,t)\ \in L_2(Q)$.

Обозначим через $\overset{\bullet}{W}{}_2^{(1,1,0)}(Q)$ пространство, состоящее из функций f из $L(Q)$, которые имеют обобщенные производные f_x, f_y ,принадлежащие $L_2(Q)$, и удовлетворяют условиям $f(0,y,t)=0,\ f(x,0,t)=0$. Далее, обозначим через $\overset{\bullet}{V}{}_2^{(1)}(Q)$ пространство функций g из $L_2(Q)$, которые имеют обобщенные производные g_x,g_y,g_t, принадлежащие $L_2(Q)$, и удовлетворяют условиям

$$g(0,y,t)=g(1,y,t),g(x,0,t)=g(x,1,t)$$

Следуя [10], под обобщенными решениями задачи (1)-(3) понимаются функции $z(x,y,t)$ из класса $\overset{\bullet}{W}{}_2^{(1,1,0)}(Q)$, удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega\left[z(x,y,t)\Phi(x,y,t)-z_0(x,y)\Phi(x,y,0)\right]dxdy-\\ &-\int_0^T\int_\Omega\left[z(x,y,\tau)\Phi_\tau(x,y,\tau)-z_x(x,y,\tau)\Phi_x(x,y,\tau)-z_y(x,y,\tau)\Phi_y(x,y,\tau)\right]\\ &dxdyd\tau-\int_0^t\int_0^1\left[z_x(1,y,\tau)-z_x(0,y,\tau)\right]\Phi(0,y,\tau)dyd\tau-\\ &-\int_0^t\int_0^1\left[z_y(x,1,\tau)-z_y(x,0,\tau)\right]\Phi(x,0,\tau)dxd\tau=0 \end{aligned} \tag{4}$$

для любой функции $\Phi\in\overset{\bullet}{V}{}_2^{(1)}(Q)$.

Решение задачи (1)-(3) есть сумма решений краевой задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ в } Q, \tag{5}$$

$$z(x,y,0)=z_0(x,y), \quad (x,y)\in\Omega, \tag{6}$$

$$z(0,y,t)=0, \quad z_x(0,y,t)=z_x(1,y,t)$$
$$z(x,0,t)=0, \quad z_y(x,0,t)=z_y(x,1,t) \tag{7}$$

и задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+u(x,y,t) \text{ в } Q, \tag{8}$$

$$z(x,y,0)=0, \quad (x,y)\in\Omega, \tag{9}$$

$$z(0,y,t)=0, \quad z_x(0,y,t)=z_x(1,y,t)$$
$$z(x,0,t)=0, \quad z_y(x,0,t)=z_y(x,1,t) \tag{10}$$

Для получения решения задачи (5)-(7) применим метод Фурье. Будем искать нетривиальное частное решение в форме $z(x,y,t)=\upsilon(x,y)T(t)$. Подставляя эту формулу в уравнение (5) и краевые условия (7), получим задачу для нахождения собственной функции $\upsilon(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}+\lambda\upsilon=0, \quad (x,y)\in Q, \tag{11}$$

$$\upsilon(0,y)=0, \quad \upsilon_x(0,y)=\upsilon_x(1,y)$$
$$\upsilon(x,0)=0, \quad \upsilon_y(x,0)=\upsilon_y(x,1) \tag{12}$$

функция $T(t)$ является решением уравнения

$$T'(t)+\lambda T(t)=0 \tag{13}$$

Краевая задача (11)-(12) является несамосопряженной. Сопряженной к ней будет задача:

$$\bar{\varpi}_{xx}+\bar{\varpi}_{yy}+\bar{\lambda}\omega=0 \text{ в } \Omega \tag{14}$$

$$\bar{\varpi}_x(1,y)=0, \quad \bar{\varpi}(0,y)=\bar{\varpi}(1,y),$$
$$\bar{\varpi}_y(x,1)=0, \quad \bar{\varpi}(x,0)=\bar{\varpi}(x,1) \tag{15}$$

В самом деле,

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right)\omega dxdy=\int_0^1 \upsilon_x\,\bar{\varpi}\Big|_{x=0}^{x=1}dy+\int_0^1 \upsilon_y\,\bar{\varpi}\Big|_{y=0}^{y=1}dx-\int_0^1 \upsilon\,\bar{\varpi}_x\Big|_{x=0}^{x=1}dy-$$
$$-\int_0^1 \upsilon\,\bar{\varpi}_y\Big|_{y=0}^{y=1}dx+\iint_\Omega \upsilon\left(\frac{\partial^2\bar{\varpi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{\varpi}}{\partial y^2}\right)dxdt$$

Отсюда видно, что

$$\bar{\varpi}_x(1,y)=0, \quad \bar{\varpi}(0,y)=\bar{\varpi}(1,y),$$
$$\bar{\varpi}_y(x,1)=0, \quad \bar{\varpi}(x,0)=\bar{\varpi}(x,1).$$

Решение краевой задачи (11), (12) ищем в виде $\upsilon(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$. Подставляя эту формулу в уравнение и краевые условия, получаем

$$\begin{aligned}&\varphi''(x)+\mu\varphi(x)=0,\quad 0<x<1,\\&\varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=\varphi'(1).\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}&\psi''(y)+\eta\psi(y)=0,\quad 0<y<1,\\&\psi(0)=0,\quad \psi'(0)=\psi'(1),\quad \lambda=\mu+\eta.\end{aligned}\tag{17}$$

В работе [5] показано, что задача (16)-(17) имеет собственные значения

$$\mu_k=(2\pi k)^2,\ k=0,1,2,...,\quad \eta_i=(2\pi i)^2,i=0,1,2,...\tag{18}$$

и систему собственных и присоединенных функций

$$\begin{aligned}&\varphi_0(x)=x,\varphi_{2k-1}(x)=x\cos\sqrt{\mu_k}x,\varphi_{2k}=\sin\sqrt{\mu_k}x,\\&\psi_0(y)=y,\psi_{2i-1}(y)=x\cos\sqrt{\eta_i}y,\psi_{2i}=\sin\sqrt{\eta_i}y,\\&i,j=1,2,3,...\end{aligned}\tag{19}$$

Поэтому задача (11), (12) имеет собственные значения

$$\lambda_{ki}=\mu_k+\eta_i\tag{20}$$

и систему собственных и присоединенных функций

$$\upsilon_{ki}(x,y)=\varphi_k(x)\psi_k(y),\quad k,i=0,1,2,...\tag{21}$$

Тогда сопряженная задача имеет собственные значения λ_{ik} и систему собственных и присоединенных функций

$$\omega_{ki}(x,y)=X_k(x)Y_i(y),\quad k,i=0,1,2,...\tag{22}$$

$$X_0(x)=2,Y_0(y)=2,X_{2k-1}(x)=4\cos\sqrt{\mu_k}x,Y_{2i-1}(y)=4\cos\sqrt{\eta_i}y,$$
$$X_{2k}(x)=4(1-x)\sin\sqrt{\mu_k}x,Y_{2i}(y)=4(1-y)\sin\sqrt{\eta_i}y,k,i=0,1,2,...$$

Последовательности функций (21) и (22) образуют базис в пространстве $L_2(\Omega)$ и биортогональны.

Решение задачи (5)-(7) формально разлагается в биортогональный ряд

$$z(x,y,t)=\sum_{k,i=0}^{\infty}z_{ki}(t)\upsilon_{ki}(x,y)\ ,\tag{23}$$

где

$$z_{ki}(t)=\iint_{\Omega}z(x,y,t)\omega_k(x,y)dxdy\tag{24}$$

Подставляя разложение (23) в уравнение (5) и используя то, что собственные и присоединенные функции удовлетворяют различным уравнениям, получаем:

$$z'_{2k-1,2i-1}(t)+\lambda_{ki}z_{2k-1,2i-1}(t)=0,\quad k,i=1,2,...$$
$$z'_{2k-1,2i}(t)+\lambda_{ki}z_{2k-1,2i}(t)+2\sqrt{\eta_i}z_{2k-1,2i-1}(t)=0,\quad k=1,2,3,...,i=0,1,2,3,...$$
$$z'_{2k,2i-1}(t)+\lambda_{ki}z_{2k,2i-1}(t)+2\sqrt{\mu_k}z_{2k-1,2i-1}(t)=0,\quad k=0,1,2,3,...,i=1,2,3,...$$
$$z'_{2k,2i}(t)+\lambda_{ki}z_{2k,2i}(t)+2\sqrt{\mu_k}z_{2k-1,2i}+2\sqrt{\eta_i}z_{2k,2i-1}(t)=0,\quad k,i=0,1,2,...$$

Решая систему и учитывая начальные условия, имеем:

$$z_{2k-1,2i-1}(t)=z^0_{2k-1,2i-1}e^{-\lambda_{ki}t},\quad k,i=1,2,3,...$$
$$z_{2k-1,2i}(t)=\left(z^0_{2k-1,2i}-2\sqrt{\eta_i}z^0_{2k-1,2i-1}\cdot t\right)e^{-\lambda_{ki}t},\quad k=1,2,3,...,i=0,1,2,...$$
$$z_{2k,2i-1}(t)=\left(z^0_{2k,2i-1}-2\sqrt{\mu_k}z^0_{2k-1,2i-1}\cdot t\right)e^{-\lambda_{ki}t},\quad k=1,2,3,...,i=0,1,2,...$$
$$z_{2k,2i}(t)=\left\{z^0_{2k,2i}-2\left(\sqrt{\mu_k}z^0_{2k-1,2i}+\sqrt{\eta_i}z^0_{2k,2i-1}\cdot t\right)-4\sqrt{\mu_k\eta_i}t^2z^0_{2k-1,2i-1}\right\}e^{-\lambda_{ki}t},\quad k,i=0,1,2,...$$

где

$$z^0_{k,i}=\iint_\Omega z^0(x,y)\,\omega_{ki}(x,y)\,dydt,\quad k,i=0,1,2,...$$

Положим

$$G(x,y;\xi,\eta,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_{2k-1,2i-1}(x,y)\,\omega_{2k-1,2i-1}(\xi,\eta)e^{-\lambda_{ki}t}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\upsilon_{2k-1,2i}(x,y)\left[\omega_{2k-1,2i}(\xi,\eta)-2\sqrt{\eta_i}t\omega_{2k-1,2i-1}(\xi,\eta)\right]e^{-\lambda_{ki}t}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\upsilon_{2k,2i-1}(x,y)\left[\omega_{2k,2i-1}(\xi,\eta)-2\sqrt{\mu_k}t\omega_{2k-1,2i-1}(\xi,\eta)\right]e^{-\lambda_{ki}t}+$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\upsilon_{2k,2i}(x,y)\left[\omega_{2k,2i}(\xi,\eta)-2(\sqrt{\mu_k}\omega_{2k-1,2i}(\xi,\eta)+\sqrt{\eta_i}\omega_{2k,2i-1}(\xi,\eta))t-4\sqrt{\mu_k\eta_i}\omega_{2k-1,2i-1}(\xi,\eta)t^2\right]$$
$$e^{-\lambda_{ki}t}$$

Тогда обобщенное решение задачи (5)-(7) можно представить в виде

$$z(x,y,t)=\iint_\Omega G(x,y,\xi,\eta,t)z^0(\xi,\eta)\,d\eta d\xi. \tag{26}$$

Зная решение задачи (5)-(7), нетрудно получить решение задачи (8)-(10). Это решение имеет вид

$$z_2(x,y,t)=\int_0^t\iint_\Omega G(x,y,\xi,\eta,t-\tau)\mu(\xi,\eta,\tau)\,d\eta d\xi d\tau\;. \tag{27}$$

Тогда решение задачи (1)-(3) является суммой этих решений:

$$z(x,y,t)=\iint_\Omega G(x,y;\xi,\eta,t)z^0(\xi,y)\,d\eta d\xi+\int_0^t\iint_\Omega G(x,y;\xi,\eta,t-\tau)\mu(\xi,\eta,\tau)\,d\eta d\xi d\tau \tag{28}$$

Теорема 1. При условиях $z^0(x,y)\in L_2(\Omega),\quad u(x,y,t)\in L_2(Q)$ задача (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение $z(x,y,t)\in \overset{\bullet}{W}{}_2^{(1,1,0)}(Q)$, представимое в виде (28).

Для доказательства используются двусторонние априорные оценки. Любая функция $\varphi(x,y)\in L_2(\Omega)$ разлагается в биортогональный ряд

$$\varphi(x,y)=\sum_{k,i=0}^{\infty}\varphi_{k,i}\upsilon_{ki}(x,y), \tag{29}$$

где коэффициенты вычисляются по формуле

$$\varphi_{k,i}=\iint_{\Omega}\varphi(x,y)\omega_{k,i}(x,y)\,dydx$$

и справедлива оценка

$$18/17\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\le\sum_{k,i=0}^{\infty}\varphi_{ki}^2\le 64\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{30}$$

2. Управление с минимальной энергией.

Пусть $a(x,y)-$ заданная функция из $L_2(\Omega)$. В классе допустимых управлений требуется указать управление

$$u(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{k,i}(t)\upsilon_{k,i}(x,y), \tag{31}$$

где

$$u_{k,i}(t)=\iint_{\Omega}u(x,y,t)\omega_{k,i}(x,y)\,dydt$$

такое, что соответствующее ему решение $z(x,y,t)$ задачи (1)-(3), представленное в форме (28), удовлетворяло условию

$$z(x,y,T)=a(x,y), \tag{32}$$

и при этом функционал

$$J(u)=\int_0^T\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{k,i}^2(t)\,dt \tag{33}$$

принимал наименьшее возможное значение.

Условие (32) нужно понимать в том смысле, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\iint_{\Omega}\left[z(x,y,T-\Delta t)-a(x,y)\right]^2dydx=0$$

Учитывая (28), условие (32) можно записать в виде

$$\int_0^T\iint_{\Omega}G(x,y;\xi,\eta,T-t)u(\xi,\eta,t)\,d\eta d\xi dt=b(x,y), \tag{34}$$

где

$$b(x,y)=a(x,y)-\iint_{\Omega}G(x,y;\xi,\eta,T)z^0(\xi,\eta)\,d\eta d\xi.$$

Функция $b(x,y)$ не зависит от управления и однозначно определяется начальным распределением температуры $z^0(x,y)$ и функции $a(x,y)$. Таким образом, для того чтобы управление $u(x,y,t)$ определяло решение $z(x,y,t)$ задачи (1)-(3), удовлетворяющее условию (32), необходимо и достаточно, чтобы это управление было решением интегральная уравнения (33). Разложим функция $b(x,y)$ в биортогональный ряд

$$b(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}b_{ki}\upsilon_{k,i}(x,y), \tag{35}$$

где

$$b_{ki}=\iint_{\Omega}b(\xi,\eta)\omega_{k,i}(\xi,\eta)\,d\eta d\xi$$

Подставляя (35) в уравнение (34) и учитывая (25), получаем

$$\int_0^T u_{2k-1,2i-1}(t)e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}dt=b_{2k-1,2i-1},\quad k,i=1,2,3,... \tag{36}$$

$$\int_0^T\left[u_{2k-1,2i}(t)-2\sqrt{\eta_i}(T-t)u_{2k-1,2i-1}(t)\right]e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}dt=b_{2k-1,2i},$$
$$k=1,2,3,...,i=0,1,2,... \tag{37}$$

$$\int_0^T\left[u_{2k,2i-1}(t)-2\sqrt{\mu_k}(T-t)u_{2k-1,2i-1}(t)\right]e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}dt=b_{2k,2i-1},$$
$$k=0,1,2,...,\ i=1,2,3,... \tag{38}$$

$$\int_0^T\left[u_{2k,2i}(t)-2\left(\sqrt{\mu_k}u_{2k-1,2i}(t)+\sqrt{\eta_i}u_{2k,2i-1}(t)\right)(T-t)-4\sqrt{\mu_k\eta_i}(T-t)^2u_{2k-1,2i-1}(t)\right]$$
$$e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}dt=b_{2k,2i},\quad k,i=0,1,2,... \tag{39}$$

Формулировка задачи в терминах проблемы моментов [8]. Требуется найти управление (31) такое, чтобы последовательность $\{u_{k,i}(t)\}$ удовлетворяла бесконечной системе уравнений (36)-(39), при этом функционал (33) принимал наименьшее возможное значение.

Решение каждого уравнения (36) в $L_2(0,T)$ ищется в одномерном пространстве H_λ элементов $q_{k,i}(t)$, определяемых формулой

$$q_{k,i}(t)=c_{k,i}e^{-\lambda_{k,i}(T-t)},$$

где $c_{k,i}-$ произвольная постоянная. Тогда любой элемент $p_{k,i}(t)\in L_2(0,T)$ можно однозначно представить в виде [11]:

$$u_{k,i}(t)=q_{k,i}(t)+r_{k,i}(t),$$

где $r_{k,i}(t)$ ортогонально к $q_{k,i}(t)$:

$$\int_0^T q_{k,i}(t)r_{k,i}(t)dt=0,$$

при этом

$$\int_0^T {u_{k,i}}^2(t)dt = \int_0^T {q_{k,i}}^2(t)dt + \int_0^T {r_{k,i}}^2(t)dt.$$

Так как

$$\int_0^T e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}\mu_{k,i}(t)dt = \int_0^T e^{-\lambda_{k,i}(T-t)}q_{k,i}(t)dt,$$

то слагаемое $r_{k,i}(t)$ не влияет на решение уравнения (36), но при этом норма увеличивается на $\int_0^T r_{k,i}^2(t)dt > 0$.

Таким образом, решая систему (36), получаем:

$$u_{2k-1,2i-1}(t) = a_{k,i}b_{2k-1,2i-1}e^{-\lambda_{k,i}(T-t)},$$
$$a_{k,i} = \frac{2\lambda_{k,i}}{1-e^{-2\lambda_{k,i}T}} \qquad (40)$$

Соответствующее ему значение функционала равно

$$I_{2k-1,2i-1} = \int_0^T u_{2k-1,2i-1}^2(t)dt = a_{k,i}b_{2k-1,2i-1}^2,\ k,i = 1,2,3,... \qquad (41)$$

Подставляя (40) в систему (37) и (38), получаем:

$$u_{2k-1,2i}(t) = a_{ki}A_{2k-1,2i}e^{-\lambda_{k,i}(T-t)},$$
$$A_{2k-1,2i} = b_{2k-1,2i} + 2\sqrt{\eta_i}b_{2k-1,2i-1}\left(\frac{1}{2\lambda_{ki}} - \frac{T}{e^{2\lambda_{ki}T}-1}\right),$$
$$k = 0,1,2,...,\ i = 1,2,3,... \qquad (42)$$
$$u_{2k,2i-1}(t) = a_{ki}A_{2k,2i-1}e^{-\lambda_{ki}(T-t)},$$
$$A_{2k,2i-1} = b_{2k,2i-1} + 2\sqrt{\mu_k}b_{2k-1,2i-1}\left(\frac{1}{2\lambda_{ki}} - \frac{T}{e^{2\lambda_{ki}T}-1}\right),$$
$$k = 0,1,2,...,\ i = 1,2,3,... \qquad (43)$$
$$I_{2k-1,2i} = \int_0^T u_{2k-1,2i}^2(t)dt = a_{k,i}A_{2k-1,2i}^2,$$
$$k = 1,2,3,...,\ i = 0,1,2,... \qquad (44)$$
$$I_{2k,2i-1} = \int_0^T u_{2k,2i-1}^2(t)dt = a_{k,i}A_{2k,2i-1}^2,$$
$$k = 0,1,2,...,\ i = 1,2,3,... \qquad (45)$$

Далее, подставляя функции (40),(42),(43) в уравнение (39), находим, что это уравнение имеет в H_λ единственное решение

$$u_{2k,2i}(t) = a_{k,i} A_{2k,2i} e^{-\lambda_{ki}(T-t)},$$

$$A_{2k,2i} = 2\left(\sqrt{\mu_k} A_{2k-1,2i} + \sqrt{\eta_i} A_{2k,2i-1}\right)\left(\frac{1}{2\lambda_{ki}} - \frac{T}{e^{2\lambda_{ki}T} - 1}\right) +$$

$$+ 4\sqrt{\mu_k \eta_i} b_{2k-1,2i-1}\left(\frac{2}{(2\lambda_{ki})^2} - \frac{T}{2\lambda_{ki}\left(e^{2\lambda_{ki}T} - 1\right)} - \frac{T^2}{e^{2\lambda_{ki}T} - 1}\right) \tag{46}$$

$$I_{2k,2i} = \int_0^T u_{2k,2i}^2(t)dt = a_{ki} A_{2k,2i}^2 . \tag{47}$$

Задача об управлении с минимальной энергией будет иметь решение, если сходится двойной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} I_{k,i} , \tag{48}$$

где $I_{k,i}$ определяется формулой (41),(44),(45),(47). Для сходимости ряда (48) требуется, чтобы функция $b(x,y)$ удовлетворяла условию

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_{ki} b_{ki}^2 < +\infty \tag{49}$$

Теорема 2. Пусть функция $b(x,y)$, входящая в уравнение (34), удовлетворяет условию (49). Тогда задача об управлении с минимальной энергией имеет единственное решение в виде (31), где коэффициенты определяются формулами (40),(42),(43),(46), а соответствующее минимальное значение функционала (33) вычисляется суммой ряда (48).

Библиографический список

1. Бутковский, А.Г., Малый, С.А., Андреев, Ю.Н. Оптимальное управление нагревом металла [Текст]. – М.: Металлургия, 1972. – 440 с.
2. Бутковский, А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами [Текст]. – М., Наука, 1975. – 568 с.
3. Бушуев, И.В. Об одном классе задач оптимального управления для параболических уравнений, Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. – № 5. – С. 1000-1005.
4. Васильев, Ф.П. Методы решения эксемальных задач [Текст]. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
5. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами [Текст]. – М.: Наука, 1978 – 464 с.
6. Ионкин, Н.И. Решение краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим условием // Дифферен. ур-я. – 1977. – Т. XIII. – №2.– С. 294-304.
7. Ионкин, Н.И., Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифферен. ур-я. – 1977. – Т. XIII. – №2. – С. 294-304.
8. Красовский, Н.Н. Теория управления движением [Текст]. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
9. Крейн, М.Г., Нудельман, А.А. Проблема моментов Маркова и эксемальные задачи [Текст]. – М.: Наука, 1978. – 552 с.
10. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики [Текст]. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

11. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст]. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
12. Люстерник, Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа [Текст]. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
13. Тихонов, А.Н., Самарский, А.А. Уравнения математической физики [Текст]. – М.: Наука, 1972. – 680 с.
14. Fattorini H.Q., Russel D.L., Exait controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension, Arch. for. Rational and Anal. Vol. 43, № 4, 1971.