ХРОНИКА И ИНФОРМАЦИЯ

УДК 510.6

М.Е. Колоскова

ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ШКОЛЫ ИМ. А.Н. КОЛМОГОРОВА

M.E. Koloskova

THE BASIC MATHEMATICAL PRINCIPLES IN THE COURSE OF MATHEMATICS OF A.N. KOLMOGOROV'S SCHOOL

Школа им. А.Н. Колмогорова – это небольшая республика Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, в которой обучаются ребята, тянущиеся к науке и получению новых знаний, проявившие глубокий интерес к изучению определенного предмета. Основное предназначение школы состоит в создании условий для воспитания и развития у учащихся пытливого и творческого отношения к учебе, в подготовке к обучению в вузе и раннему приобщению к научной работе.

Учебные программы школы им. Колмогорова отличаются от большинства программ общеобразовательных школ тем, что включают в себя много материала, выходящего за рамки официальных министерских программ. Математических предметов в школе три: геометрия, алгебра и математический анализ, причем все эти курсы имеют свою специфику. Так, геометрия в десятом классе посвящена курсу планиметрии, и главное содержание этого курса – расширение кругозора обучающихся и знакомство их с "геометрическими жемчужинами", воспитание геометрического мышления (например, в курс включены такие темы, как число пи и неравенство Гюйгенса, равносоставленность многоугольников, задача Дидоны, луночки Гиппократа, инверсия, модели плоскости Лобачевского и др.). Стереометрия изучается за один год и также с добавлением важных тем, нацеленных на развитие пространственного воображения и интуиции (добавляются такие темы как теорема Эйлера о многогранниках, гармошка Шварца, объем тетраэдра, тригонометрия на сфере и др.). В курсе математического анализа изучаются понятия производной и интеграла, начала дифференциального и интегрального исчислений и его приложений, при этом изложение всегда делается доступным и наглядным, во многом опирающимся на наблюдения и интуицию. Алгебраический курс в основном ориентирован на конкретные примеры и задачи. На типичных примерах рассматриваются различного рода алгебраические структуры. В курс всегда включаются комбинаторика и комплексные числа, рассматриваются задачи, лежащие на стыке алгебры и теории чисел, геометрии, математического анализа. Курс содержит значительные исторические экскурсы, приучает к вычислениям и преобразованиям и повышает математическую культуру учащихся. Как показывает практика, составленные таким образом курсы, во-первых, вызывают неподдельный интерес у учеников, что очень важно при изучении предмета, а во-вторых, служат решению одной из главной цели обучения – подготовиться к поступлению в университет и учебе в нем.

Одна из основных задач школы им. Колмогорова – научить учиться думать, то есть развить способность учащихся грамотно использовать информацию, полученную в процессе обучения, а также развить определенные навыки и определенный склад ума. А достигнуть этого можно только, научив школьника самостоятельно решать задачи. Выдающийся математик и педагог Д. Пойа писал об этом: "Решение задач – специфическое достижение разума, разум же – особый дар, которым наделен человек. Способность к преодолению препятствий, к нахождению обходного маневра там, где не видно прямого пути, возвышает умное животное над тупым, человека – над самым умным животным и талантливых людей – над другими людьми.” Что же такое задача? Задача “представляет необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели.” А решение задачи и состоит в поиске этого средства. Обучение решениям задач является важнейшей составной частью всего курса математики нашей школы и подготовки к обучению в вузе. Одну из главных ролей в умении решать задачи играют восемь основных математических принципов, включенные в тематические планы курса математики в школе им. Колмогорова, а именно:

- Принцип математической индукции.
- Принцип Дирихле.
- Принцип включения-исключения.
- Принцип исключенного третьего.
- Принцип суперпозиции.
- Принцип двойственности.
- Принцип непрерывности.
- Принцип (метод) Декарта.

Остановимся немного подробнее на каждом из них.

Принцип математической индукции

Метод индукции в широком его понимании состоит в переходе от частных наблюдений к универсальной, общей закономерности или общей формулировке. В таком толковании метода – это, конечно, основной прием проведения исследований в любой экспериментальной естественно-научной деятельности человека. Метод (принцип) математической индукции в простейшей его форме применяется тогда, когда нужно доказать некоторое утверждение для всех натуральных чисел. Сам термин индукция происходит от латинского слова induction (наведение), которое означает переход от единичного знания об отдельных предметах данного класса к общему выводу обо всех предметах данного класса, что является одним из основных методов познания.

Принцип математической индукции в привычной форме двух шагов впервые появился в 1654 году в работе Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», в которой индукцией доказывается простой способ вычисления числа сочетаний (биномиальных коэффициентов). Д. Пойа в книге [2] цитирует Б. Паскаля с небольшими изменениями, данными в квадратных скобках:

«Несмотря на то, что рассматриваемое предложение [явная формула для биномиальных коэффициентов] содержит бесчисленное множество частных случаев, я дам для нее совсем короткое доказательство, основанное на двух леммах.

Первая лемма утверждает, что предположение верно для основания – это очевидно. [При $n = 1$ явная формула справедлива…].

Вторая лемма утверждает следующее: если наше предположение верно для произвольного основания [для произвольного n], то оно будет верным и для следующего за ним основания [для $n+1$].

Из этих двух лемм необходимо вытекает справедливость предложения для всех значений n. Действительно, в силу первой леммы оно справедливо для $n = 1$; следовательно, в силу второй леммы оно справедливо для $n = 2$; следовательно, опять-таки в силу второй леммы оно справедливо для $n = 3$, и так до бесконечности».

Итак, логическая схема, состоящая из двух шагов: первый – ***базис индукции*** (проверка предположения для основания), второй – ***индуктивный переход*** или шаг индукции, включающий в себя предположение (утверждение верно при $n = k$) и заключение (утверждение верно при $n = k + 1$), и позволяющая заключить, что рассматриваемое утверждение верно для всех натуральных чисел (или для всех, начиная с некоторого). Так как справедливы и базис, и переход, то данный прием называется *принципом математической индукции*, на котором и *основан метод математической индукции*. Параметр n называется параметром индукции.

Метод математической индукции широко применяется при решении самых разнообразных задач.

Принцип Дирихле

При решении задач часто бывает полезен так называемый “принцип Дирихле”, названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле; по-другому этот принцип еще называют “принципом ящиков” или “принципом голубятни”. Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в следующей форме (или аналогичной):

Если пять кроликов помещены в четыре клетки, то в одной из клеток находятся не менее двух кроликов; или, другими словами, нельзя посадить пять кроликов в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.

Более общая форма принципа Дирихле такова:

Если (kn+1) кролик помещен в n клетках, то в одной из клеток находятся не менее (k+1) кролика; или в эквивалентной форме – нельзя посадить (kn+1) кролика в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.

Принцип включения-исключения

Наряду с рассмотренными выше принципами, принцип (формула) включения – исключения является важнейшим математическим инструментом, особенно в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

Если множества A1 и A2 состоят из конечного числа элементов, то

$$n(A1 \cup A2) = n(A1) + n(A2) - n(A12), \qquad (1)$$

где n(X) обозначает число элементов множества X, $A12 = A1 \cap A2$.

Это одна из важных формул в комбинаторике; ее называют также правилом сложения. С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа конечных множеств. Например, для трех множеств имеем (обозначения вида Aij и A123 здесь и всюду в дальнейшем обозначают пересечения двух и трех указанных индексами множеств):

$$n(A1 \cup A2 \cup A3) = n(A1 \cup (A2 \cup A3)) = = n(A1) + n(A2 \cup A3) - n((A1 \cap (A2 \cup A3)) =$$
$$= n(A1) + n(A2) + n(A3) - n(A23) - n(A12 \cup A13) =$$
$$= n(A1) + n(A2) + n(A3) - n(A23) - n(A12) - n(A13) + n(A12 \cap A13).$$

Таким образом,

$$n(A1 \cup A2 \cup A3) = n(A1) + n(A2) + n(A3) - n(A12) - n(A13) - n(A23) + n(A123).$$

Здесь мы применили два раза правило сложения для двух множеств и использовали то, что $A1 \cap (A2 \cup A3) = A12 \cup A13$.

Полученная формула, как и формула (1), являются частными случаями общего принципа (формулы) включений – исключений. В общем виде принцип включения-исключения выглядит следующим образом: Пусть имеется n объектов и $n(\alpha)$ из них обладают некоторым свойством α; подобным же образом через $n(\beta)$, $n(\gamma)$,… обозначим, соответственно, число тех объектов, которые обладают свойствами β, γ,... Если через $n(\alpha,\beta)$, $n(\alpha,\gamma)$, $n(\beta,\gamma)$, $n(\alpha,\beta,\gamma)$,… обозначить число объектов, которые обладают теми свойствами, которые указаны в скобках, то число объектов, которые не обладают ни одним из свойств α, β, γ, … равно

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) + n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\gamma) + \ldots$$

Этот общий прием (формула) имеет место, конечно, для любого конечного числа свойств объектов. При этом если свойств у объектов много, то число членов в написанном выражении, естественно, возрастает. Например, для числа объектов, не обладающих четырьмя свойствами, справедлива формула

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) - n(\delta)+n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\alpha,\delta) + n(\beta,\gamma) + n(\beta,\delta) + n(\gamma,\delta)$$
$$-n(\alpha,\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\delta) - n(\alpha,\gamma,\delta) - n(\beta,\gamma,\delta) + n(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

Принцип исключенного третьего

Принцип исключенного третьего впервые был сформулирован Аристотелем и представляет собой принцип классической формальной логики, утверждающий, что *всякое суждение или истинно, или ложно, третьего не дано* (“tertium non datur”).

Придерживаясь терминологии математической логики, *этот закон (принцип) исключенного третьего* утверждает, что дизъюнкция $A \vee \mathbf{A}$ является *тавтологией* для любого высказывания A: любое высказывание такой формы будет истинным в силу одной своей структуры.

Закон противоречия, который выражается тавтологией ($A \wedge \mathbf{A}$), является проявлением принципа двойственности в алгебре высказываний и исчислении предикатов.

Известное под не совсем удачным названием доказательство «от противного» представляет собой в действительности косвенное доказательство. Такое доказательство некоторой теоремы Т состоит в том, что исходят из отрицания Т, называемого допущением косвенного доказательства, и выводят из него два противоречащих друг другу предложения (типа Р и **Р**). Это выведение называется «приведением к абсурду (нелепости)» – “reductio ad absurdum”. В конце такого доказательства обычно говорят: «Полученное противоречие доказывает теорему». Что значит «противоречие доказывает»? Каков точный смысл этих слов? Ввиду того, что противоречие Р $\wedge$ **Р** тождественно ложно, его отрицание (Р $\wedge$ **Р**) общезначимо, и после получения противоречия мы можем дополнить его до вывода теоремы. Следовательно, точный смысл слов «полученное противоречие доказывает теорему» нужно понимать как возможность достраивания доказательства после противоречия до доказываемого предложения Т.

С принципом исключенного третьего тесно связан и метод доказательства, опирающийся на эквивалентность доказываемой теоремы и теоремы, противоположной для обратной к данной. Отметим также, что построение контрпримера является классическим способом опровержения гипотез и также тесно связано с принципом исключенного третьего.

Принцип суперпозиции

Сущность *принципа суперпозиции* (термин происходит от латинского слова superposito – наложение) заключается в *получении общего решения путем объединения решений в частных случаях*. Или, другими словами, этот принцип состоит в обнаружении (выделении) того частного случая, который является основой для обобщения и развития в разных направлениях.

С использованием данного принципа каждый ученик сталкивается, например, при обычном доказательстве хорошо известной теоремы планиметрии, утверждающей, что “центральный угол равен удвоенному вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу”. Ее доказательство основано на рассмотрении частного случая, когда одна из сторон вписанного угла совпадает с диаметром. К нему сводятся также и утверждения об измерении углов, связанных с дугами окружности, в случаях произвольного расположения вершины угла на плоскости.

Важными примерами проявления этого принципа (и, кстати говоря, принципа математической индукции) является рассмотрение треугольников площади 1/2, все вершины которых находятся в узлах клетчатой бумаги, при доказательстве общей формулы Пика, а также выделение случаев треугольника и квадрата и двух квадратов при доказательстве общей формулы Пика для произвольного простого многоугольника. Все эти вопросы включены в программу лекционного курса школы им. А.Н. Колмогорова.

Отметим также, что рассмотрение частных примеров при анализе той или иной задачи – это важнейший методический прием на любом уровне преподавания математики.

Принцип двойственности

Принцип двойственности – это принцип, формулируемый в некоторых разделах математики и заключающийся в том, что *каждому верному утверждению этого раздела отвечает двойственное утверждение, которое может быть получено из первого путём замены входящих в него понятий на другие, так называемые двойственные им понятия*.

В школе с принципом двойственности учащиеся в основном сталкиваются при изучении следующих разделов математики:

- Алгебра множеств.
- Проективная геометрия.
- Теория многогранников.

Рассмотрим, как формулируется принцип двойственности в каждом из этих разделов.

Алгебра множеств

Основными операциями алгебры множеств являются следующие (будем считать, что фигурирующие ниже множества являются подмножествами некоторого одного универсального множества I):

1. *Сумма или объединение множеств* (если A и B – два множества, то их суммой или объединением множеств называется новое множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые входят либо в A, либо в B и обозначается через $A \cup B$);
2. *Пересечение множеств* (множество, состоящее из общих элементов множеств A и B, обозначается $A \cap B$);
3. *Дополнение* (если A – некоторое множество из универсального множества I, тогда под его дополнением A' в I понимается множество всех элементов I, которые не принадлежат A).

Перечисленные выше операции обладают следующими свойствами:

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3. $A \cup A' = I$, $A \cap A' = \varnothing$, $\varnothing' = I$, $I' = \varnothing$, $A'' = A$, где $\varnothing$ – пустое множество.

Легко заметить, что законы (свойства), которым удовлетворяют операции в алгебре множеств, обладают важным *принципом двойственности: если в одном из доказанных уже свойств (законов) заменить друг на друга соответственно символы $\subset$ на $\supset$, $\varnothing$ на I, $\cup$ на $\cap$ в каждом их вхождении, то в результате снова получается верное свойство*. Так, из свойств объединения вытекают свойства пересечения множеств:

$$A \cap B = B \cap A,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,\ A \cap A = A \text{ и т.д.}$$

Проективная геометрия

Проективное пространство (и плоскость) определяется аксиоматически. Выразим основные аксиомы инцидентности точек, прямых и плоскостей в проективном пространстве парами предложений, чтобы выявить и подчеркнуть их *двойственность*.

1a) Две различные точки определяют единственную прямую, на которой они обе лежат.
1b) Две различные плоскости определяют единственную прямую, через которую они проходят.
2a) Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость, на которой они лежат.
2b) Три плоскости, не проходящую через одну прямую, определяют единственную точку, через которую они все проходят.
3a) Точка и прямая, не содержащая эту точку, определяют единственную плоскость, на которой они обе лежат.
3b) Плоскость и прямая, не лежащая в этой плоскости, определяют единственную точку, через которую они обе проходят.
4a) Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, пересекаются в единственной точке.
4b) Две различные прямые, имеющие общую точку, определяют единственную плоскость.

Простой анализ этих утверждений показывает: каждая пара обладает тем свойством, что одно из них может быть получено из другого после замены друг другом слов "точка" и "плоскость", причем слово "прямая" должно оставаться без изменения. Очень похожее свойство мы имеем и при построении проективной плоскости. Поэтому целесообразно расширить понятие инцидентности на плоскость и точку: говорить, что "точка инцидентна с плоскостью" или "плоскость инцидентна с точкой" вместо того, чтобы говорить, что точка принадлежит плоскости или содержит ее. Теперь, если рассмотреть при этих договоренностях, например, свойство 4a, то оно будет формулироваться симметрично: две различные прямые, инцидентные с одной и той же плоскостью, инцидентны с единственной их общей точкой. Заменяя в этом предложении слово "точка" словом "плоскость" и обратно, мы получим две различные прямые, инцидентные с одной и той же точкой, инцидентны с их единственной и общей плоскостью. А это в точности совпадает со свойством 4b.

Такая «взаимозаменяемость точек и плоскостей» в аксиоматике проективного пространства, выраженных в терминах инцидентности, и отражает систему приведенных аксиом. А это, в свою очередь, означает, что из каждого выведенного из данной системы аксиом утверждения может быть получено новое верное утверждение путем простой замены слова "точка" словом "плоскость" и обратно.

Это и отражает *принцип двойственности в проективном пространстве*, который является очень мощным средством в современной математике. В частности, он позволяет принять одно из двойственных утверждений без дополнительного доказательства, если другое уже доказано. Подчеркнем еще раз, что при применении принципа двойственности в пространстве слово "прямая" не заменяется. Это связано с тем, что через две точки пространства можно провести прямую, но две прямые пространства не всегда пересекаются; иными словами, две точки пространства инцидентны с одной прямой, но две прямые пространства не всегда инцидентны с одной точкой. Одним из возможных применений принципа двойственности в проективном пространстве является заключение о справедливости теоремы, обратной к теореме Дезарга (которая двойственна прямой теореме) без специального ее доказательства.

Естественным следствием принципа двойственности в пространстве является соответствующий ему принцип двойственности на проективной плоскости: Из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости, выраженного в терминах инцидентности, может быть получено второе предложение путем замены слова "точка" словом "прямая" и обратно.

Двойственные многогранники

При изучении многогранников иногда важно знать не форму и размеры граней, а только число сторон каждой грани и общую схему соединения граней в поверхность многогранника. Свойства многогранников, связанные лишь с общей схемой соединения его граней, называются *комбинаторными (или топологическими) свойствами многогранника*.

При изучении комбинаторных свойств многогранников естественно приходят к понятию абстрактного многогранника. *Абстрактным многогранником* называется конечная совокупность произвольных элементов, называемых вершинами, ребрами и гранями, для которых каким-то образом определено отношение инцидентности (то есть указано, какие вершины, ребра, грани считаются инцидентными).

Чтобы задать абстрактный многогранник, достаточно перечислить все его вершины A, B, C, …, ребра a, b, c, … и грани α, β, γ, … и указать, какие из них являются попарно инцидентными. При этом должны выполняться следующие условия (отношение инцидентности обозначается знаком ~; например, α ~ A означает, что грань α инцидентна вершине A):

1. Отношение инцидентности (грани и ребра, грани и вершины, ребра и вершины) симметрично; то есть, например, α~A, то и A~α.
2. Отношение инцидентности транзитивно: если A ~ a и a ~ α, то A~α.
3. Если A ~ α, то существуют два и только два ребра, инцидентных как вершине A, так и грани α.
4. Если каждая из двух заданных граней инцидентна каждой из двух вершин, то существует одно и только одно ребро, инцидентное обеим этим граням и обеим вершинам.
5. а) Каждое ребро инцидентно двум и только двум вершинам.
   б) Каждое ребро инцидентно двум и только двум граням.
6. а) Для любых двух вершин A и B можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \dots, a_к$ и вершины $A_1, A_2, \dots, A_{к-1}$, чтобы в цепочке $A, a_1, A_1, a_2, A_2 \dots, a_к, B$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентными; если вершины A и B инцидентны одной и той же грани, то все вершины A_i и ребра a_i можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же грани.

   б) Для любых двух граней α и β можно так выбрать ребра $a_1, a_2, \dots, a_к$ и грани $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{к-1}$, чтобы в цепочке $\alpha, a_1, \alpha_1, a_2, \alpha_2 \dots, a_к, \beta$ каждые два соседних элемента были взаимно инцидентными; если грани α и β инцидентны одной и той же вершине A, то все грани αi и ребра ai можно выбрать так, чтобы они были инцидентными той же вершине A.

Свойства отношения инцидентности 1–6 для абстрактного многогранника и его определение позволяют сделать вывод о том, что, имея какой-либо абстрактный многогранник M и называя его грани «вершинами», ребра – по прежнему «ребрами», а вершины – «гранями», мы получим совокупность «вершин», «ребер» и «граней», снова удовлетворяющую всем требованиям определения абстрактного многогранника, то есть некоторый новый абстрактный многогранник M1. Такая пара многогранников M и M1 называются *двойственными* друг другу. Например, октаэдр двойственен гексаэдру, додэкаэдр двойственен икосаэдру, тетраэдр двойственен самому себе, n-угольной пирамиде двойственна снова n-угольная пирамида, а n – угольной призме двойственна n – угольная бипирамида.

Отметим, что формула Эйлера, утверждающая, что для любого выпуклого многогранника V – E + F = 2 (где V – число вершин, E – число ребер и F – число граней многогранника), имеет комбинаторный тип. При этом она является примером теоремы, двойственной самой себе, так как алгебраические суммы V – E + F одинаковы для двойственных многогранников. Свойства и теоремы такого типа, когда они остаются справедливыми для двух двойственных друг другу многогранников, называют принципом двойственности для многогранников.

Принцип непрерывности

Принцип непрерывности, широко используемый в математическом анализе и в геометрии, заключается в следующем: *пусть некоторая величина F зависит от положения точки x на отрезке (ломаной или другой линии). Если при одном положении x на отрезке F < 0, а при другом положении x на отрезке F > 0, то найдется такое положение x на этом отрезке, при котором F = 0.*

Данный принцип лежит в основе доказательств многих теорем.

Теорема Брауэра. Всякое непрерывное отображение f отрезка в себя имеет по крайне мере одну неподвижную точку, то есть такую точку x_0, что $f(x_0) = x_0$.

Теорема Больцано. Если f – непрерывная функция, заданная на отрезке [a, b], и такая, что f(a) < f(b), и если число c удовлетворяет неравенствам f(a) < c < f(b), то на отрезке найдется такая точка x_0, $f(x_0) = c$.

Доказательство этих теорем основано на принципе стягивающих отрезков. Заметим, что теорема Брауэра и теорема Больцано эквивалентны, то есть одна из них может быть получена в качестве следствия другой.

Метод Декарта

Метод Декарта или метод геометрических мест является важнейшим методом решения задач на построение.

Геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ) называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Метод ГМТ состоит в следующем: решение задачи на построение сводят к нахождению некоторой точки, подчиненной двум независимым условиям. Отбрасываем одно из этих условий и ищем ГМТ, удовлетворяющих второму условию. Назовем полученную фигуру F_1. Затем отбрасываем второе условие и ищем ГМТ, удовлетворяющих первому условию. Пусть это будет фигура F_2. Очевидно, что обоим условиям удовлетворяет каждая точка пересечения фигур F_1 и F_2, а всякая точка, не принадлежащая пересечению этих фигур, не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий.

Библиографический список

1. Колмогоров, А.Н. Математика – наука и профессия [Текст]. – М. : Наука.1988. – 288 с.
2. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения [Текст]. – М. : Наука. 1975. – 464 с.
3. Пойа, Д. Математическое открытие [Текст]. – М.: Наука, 1976. – 449 с.
4. Клейн, Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии [Текст]. – М. : Наука, 1989. – 240 с.