

С.Е. Мартынова

Понятие расстояния и связанные с ним задачи на оптимизацию в школьном курсе стереометрии

В работе обсуждаются задачи на оптимизацию, связанные с понятием расстояния в школьном курсе стереометрии. Эти задачи формируют у учащихся общее видение целого ряда тем и разделов школьного курса математики и способствуют развитию познавательной активности и самостоятельности школьников.

Ключевые слова: оптимизация, расстояние, стереометрия.

S.E. Martynova

Notion of Distance and Problems Connected with It on Optimization in a School Course of Stereometry

In the article are discussed optimization problems, which are connected with the notion of distance in the school course of Stereometry. Training in solving these problems forms a general vision of a broad set of sections of the school courses of Mathematics.

Keywords: optimization, distance, Stereometry.

В любом разделе математики есть какие-то основные (первоначальные) понятия, которые в нашем сознании связаны с теми или иными физическими образами. В геометрии такими основными понятиями являются точка, прямая, плоскость, пространство и т.п. В систематических курсах геометрии можно найти перечень основных свойств этих объектов, выраженных в виде аксиом и постулатов, на основе которых строится все здание геометрии. Впервые так построил курс геометрии древнегреческий математик Евклид (IV–III век до н.э.) [1].

Создание новых общих понятий и попытка описать с их помощью разнообразные объекты – наиболее характерная черта современной математики и ее приложений. С этой точки зрения понятие *расстояния* является удобным примером для того, чтобы убедиться в плодотворности такого подхода.

Рассмотрим, какие основные свойства, связанные с расстоянием, имеют место в элементарной геометрии. Мы увидим, что специфический для математики подход к изучению различных объектов с точки зрения какого-то общего понятия открывает много интересных фактов.

Придумать хорошее обобщение какого-либо математического понятия на самом деле непросто. В основе содержательного обобщения

всегда лежат какие-то существенные свойства реального мира. В частности, важность понятия расстояния состоит в том, что ряд свойств многих реальных объектов связан с их взаимным расположением, которое часто можно охарактеризовать надлежащим образом, определенным расстоянием.

Какова же картина в школьном курсе геометрии в целом и в курсе стереометрии в частности?

В школьном курсе геометрии нахождение расстояний в пространстве является той важнейшей частью стереометрии, на которой основываются все метрические вопросы пространственной геометрии, в том числе нахождение углов, площадей, объемов, а также решение некоторых типов экстремальных задач, связанных с понятием расстояния. Заметим, что нахождение расстояний в пространстве является также завершающим этапом пропедевтики изучения в 10-м классе векторного и координатного методов в пространстве, а в 11-м классе – в изучении преобразований пространства, свойств многогранников и фигур вращения. Это свидетельствует о большой значимости вопроса о нахождении различных расстояний в пространстве при решении тех или иных стереометрических задач [5].

Следует заметить, что школьный курс математики, геометрии изобилует частностями. Так, во многих учебниках геометрии упоминаются разные виды расстояния: от точки до прямой; от точки до плоскости; между двумя прямыми - параллельными или скрещивающимися; между прямой и параллельной ей плоскостью; между двумя параллельными плоскостями. В некоторых курсах стереометрии говорится о расстоянии по поверхности, скажем в задачах, где идет речь о развертках фигур. Известный пример: паук находится на одной грани куба, а муха - на другой; требуется найти кратчайший путь по поверхности куба от паука до мухи (при условии, что данных в задаче достаточно)[6].

Но даже такой подробный перебор всевозможных расстояний не покрывает того, с чем порой приходится встречаться на практике или в задачах из тех же учебников геометрии.

В школьной же практике «дело о расстоянии» обычно сводится к нахождению длины перпендикуляра (общего перпендикуляра), существование которого во многих случаях вполне очевидно: когда он проводится от точки к прямой (к плоскости), между параллельными прямыми, между параллельными плоскостями, прямой и параллельной ей плоскостью [3].

В подобных ситуациях хочется большей общности, естественно желание иметь определение расстояния, которое работало бы во всех случаях. Такое определение есть, и при повторении школьного курса стереометрии в самый раз с ним познакомиться. Тем самым будем следовать известной научной тенденции - формулировать понятие в максимальной общности с тем, чтобы потом применять его в конкретном случае.

Определение. *Расстояние между двумя фигурами - это длина кратчайшего отрезка, соединяющего точки этих фигур.*

Другими словами, расстояние между двумя фигурами - это расстояние между ближайшими точками фигур. Если фигуры имеют общую точку, расстояние между ними считается равным нулю. Нулевое расстояние между фигурами говорит об их соприкосновении. Заметим также, что если одна из фигур - точка, то мы будем говорить о расстоянии между фигурой и точкой, а если обе фигуры - точки, то имеем расстояние между точками. Тем самым наше

определение согласовано с аксиомой расстояния.

В соответствии с данным определением отыскание расстояния между фигурами является задачей на поиск наименьшего значения между точками, принадлежащими разным фигурам, т.е. задачей «на экстремум». Такие задачи можно рассматривать как задачи на оптимизацию. «Экстремальные задачи», и в частности, на поиск наименьшего значения, встречаются в геометрии (как в планиметрии, так и в стереометрии).

При таком общем подходе нахождение расстояния между фигурами становится задачей на поиск экстремума для фигур.

Следует отметить, что поиск расстояния между фигурами столь же проблематичен, как и нахождение экстремальных значений функции. Из определения расстояния между фигурами как длины кратчайшего отрезка между их точками не следует существование такого отрезка. А если он есть, то возникает вопрос: сколько таких кратчайших отрезков можно построить, сколько раз может достигаться наименьшая длина? И то и другое надо выяснять специально.

Бывает, что между двумя фигурами нет расстояния - это когда у них нет ближайших точек, например, если данные фигуры - круги без границ, не имеющие общих точек. Выражаясь математически, если даны два «открытых» круга, то в этом случае нельзя указать ближайшие точки фигур. В школьном курсе геометрии с подобными фигурами дела не имеют, но за его пределами такие ситуации существуют, и в таком случае можно ввести понятие расстояния между двумя фигурами как точной нижней грани всевозможных расстояний между точками этих фигур.

Кратчайших отрезков между фигурами может быть бесконечное множество (как, например, между параллельными прямыми или плоскостями), но тогда они все равны и расстояние между фигурами одно. Длину кратчайшего отрезка между двумя фигурами не всегда легко найти, даже если данных в задаче в принципе хватает. Иногда для этого требуется большая вычислительная работа.

Необходимо предостеречь учащихся от словесной путаницы, которая иногда встречается. Можно услышать или прочитать о «кратчайшем расстоянии между фигурами» будто бы таких расстояний много и надо найти толь-

ко самое маленькое из них. Расстояние между двумя фигурами, если оно есть, определено однозначно, хотя достигаться может не один раз. А если нечто существует в одном экземпляре, то выбирать просто не из чего.

Рассмотрим, как использовать общее определение расстояния между фигурами в пространстве в простейших случаях. Простейшими фигурами в пространстве являются точка $(A, B, \dots)$, прямая $(a, b, \dots)$, плоскость $(\alpha, \beta, \dots)$. Соответственно можно рассматривать вопросы о расстоянии ρ между:

- 1) двумя точками $\rho(A, B)$;
- 2) точкой и прямой $\rho(A, b)$;
- 3) точкой и плоскостью $\rho(A, \beta)$;
- 4) двумя прямыми $\rho(a, b)$;
- 5) прямой и плоскостью $\rho(a, \beta)$;
- 6) двумя плоскостями $\rho(\alpha, \beta)$.

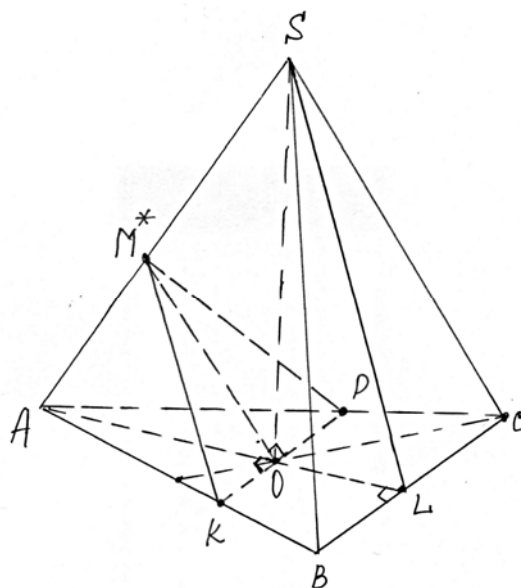
Изучение и последующее применение перечисленных вопросов о расстояниях между простейшими фигурами обычно не вызывают затруднений у школьников, за исключением случаев 3) и 4). Именно вопросы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми и расстояния между точкой и плоскостью являются наиболее трудными для учащихся как в понимании, так и в применении к задачам.

Приведем пример интересной и содержательной задачи, при решении которой используется целый комплекс методов, связанных с понятием расстояния.

Задача. В тетраэдре $SABC$ со стороной a через основание высоты тетраэдра проведена плоскость параллельно стороне основания BC и пересекающая боковое ребро тетраэдра в некоторой точке. В каких пределах могут меняться периметр и площадь полученного сечения при движении точки M^* от точки A до точки S ?

Решение. Заметим, что данную задачу можно решать, используя различные методы (в том числе и через производную), но гораздо проще и красивее обойтись чисто геометрическими методами.

Рассмотрим сечение ΔKPM^* тетраэдра, где $KP \subset (ABC)$, $KP \parallel BC$ и $M^* \in AS$.



Из равенства треугольников ΔAKM^* и ΔAPM^* нетрудно показать, что ΔM^*KP является равнобедренным $PM^* = KM^*$. Точка O — середина отрезка KP .

1) Рассмотрим вопрос о наибольшем и наименьшем значении площади сечения ΔKPM^* .

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta KPM^*} = \frac{1}{2} KP \cdot h_{M^*},$$

где KP — основание, h_{M^*} — высота этого треугольника.

Из подобия треугольников ΔAPK и ΔABC имеем

$$KP = \frac{2}{3} BC = \frac{2}{3} a.$$

Тогда длина медианы ΔABC равна $AL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ и $AO = \frac{2}{3} AL = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Так как сторона KP имеет фиксированную длину, а высота $h_{M^*} = OM^*$ может меняться в зависимости от расположения точки M^* на ребре SA , то в зависимости от величины h_{M^*} площадь будет достигать своего наибольшего и наименьшего значения. Наименьшей высотой будет общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым SA и KP .

Существует несколько способов нахождения длины общего перпендикуляра к паре скрещивающихся прямых. В данной задаче

воспользуемся, например, ортогональным проектированием.

Плоскость $(ASL) \perp PK$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, тогда $np_{(ASL)}PK = 0$ и $np_{(ASL)}AS = AS$.

Тогда

$$(h_{M^*})_{min} = (OM^*)_{min} = \rho(np_{(ASL)}PK; np_{(ASL)}AS) = \rho(O; AS).$$

В $\triangle SAO$ имеем

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SO = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Поэтому

$$(h_{M^*})_{min} = (OM^*)_{min} = \frac{AO \cdot SO}{AS} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Значит

$$(S_{сеч})_{min} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{9}.$$

Площадь сечения будет наибольшей, когда длина отрезка OM^* будет наибольшей, т.е.

$$(S_{сеч})_{max} = (S_{\square KPM^*})_{max} = \frac{1}{2} KP \cdot (M^*O)_{max},$$

Это возможно, когда точка M^* находится либо в т. A , либо в т. S . Сравним длины отрезков AO и SO :

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \text{ тогда } AO < SO.$$

$$\text{Значит } (M^*O)_{max} = SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$(S_{сеч})_{max} = \frac{1}{2} \cdot KP \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{6}}{9}.$$

Таким образом, границы изменения площади сечения

$$(S_{сеч})_{min} \leq S_{сеч} \leq (S_{сеч})_{max},$$

$$\frac{a^2\sqrt{2}}{9} \leq S_{сеч} \leq \frac{a^2\sqrt{6}}{9}.$$

2) Определим границы изменения периметра данного сечения.

$$P_{сеч} = P_{\square KPM^*} = M^*K + M^*P + KP = 2M^*K + KP.$$

Так как $KP = \frac{2}{3}a = const$, то периметр сечения меняется при изменении длины отрезка M^*K .

Рассмотрим $\triangle KOM^*$ По теореме Пифагора $M^*K^2 = M^*O^2 + OK^2$.

Длина отрезка $OK = \frac{a}{3}$ - фиксированная

величина, значит длина отрезка M^*K зависит от длины отрезка M^*O , т.е.

$$(M^*K^2)_{min} = (M^*O^2)_{min} + OK^2.$$

Имеем

$$(M^*O)_{min} = \rho(AS; KP) = \rho(O; AS) = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Поэтому

$$(M^*K)_{min} = \sqrt{(M^*O^2)_{min} + OK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Тогда

$$(P_{сеч})_{min} = (P_{\square KPM^*})_{min} = 2 \cdot (M^*K)_{min} + KP = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a(\sqrt{3} + 1).$$

Для определения наибольшего значения периметра $\triangle KPM^*$ необходимо сравнить длины отрезков AK и KS :

$$AK = \sqrt{OK^2 + OA^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2a}{3}.$$

$$SK = \sqrt{OK^2 + SO^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

$$\text{Неравенство } \frac{2a}{3} < \frac{a\sqrt{7}}{3} \text{ дает } AK < SK,$$

$$\text{значит } (M^*K)_{\max} = SK.$$

$$(P_{\text{сеч}})_{\max} = (P_{\square KPM^*})_{\max} = 2 \cdot (M^*K)_{\max} + KP = 2 \cdot \frac{a\sqrt{7}}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{2a}{3}(1 + \sqrt{7}).$$

Таким образом, границы изменения периметра сечения

$$(P_{\text{сеч}})_{\min} \leq P_{\text{сеч}} \leq (P_{\text{сеч}})_{\max},$$

$$\frac{2a}{3}(\sqrt{3} + 1) \leq P_{\text{сеч}} \leq \frac{2a}{3}(\sqrt{7} + 1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2\sqrt{2}}{9} \leq S_{\text{сеч}} \leq \frac{a^2\sqrt{6}}{9},$$

$$\frac{2a}{3}(\sqrt{3} + 1) \leq P_{\text{сеч}} \leq \frac{2a}{3}(\sqrt{7} + 1).$$

Подведем итог вышесказанному.

Почему же именно задачи на оптимизацию, связанные с понятием расстояния, по нашему мнению, представляют особый методический интерес в курсе стереометрии?

*При решении этих задач используется целый класс теоретических и практических вопросов курса математики, которые ранее вводились как отдельные единицы учебного материала.

*Эти задачи формируют у учащихся общее видение ряда тем и разделов школьного курса геометрии, что позволяет выстроить единую структурную линию понятия расстояния в геометрии.

*При решении этих задач могут использоваться различные методы решения: геометри-

ческий, координатный и векторный методы, методы математического анализа, предполагающие использование производной, метод оценки и др. Анализ задач и выбор метода их решения позволяют ученику в сравнении глубже понять специфику разных методов решения.

*Они являются многошаговыми. Они способствуют развитию мышления учащихся, а его развивать можно, только двигаясь от простого к сложному.

*Эти задачи несомненно являются одними из наиболее сложных в школьном курсе стереометрии и в значительной степени способствуют формированию самостоятельной творческой деятельности учащихся, пониманию и закреплению знаний по ряду тем школьного курса математики.

*Они способствуют развитию познавательной активности учащихся, исследовательских навыков, предлагают самостоятельный творческий поиск при их решении.

*Актуальность задач: эти задачи являются неотъемлемой частью задач ЕГЭ по стереометрии группы С - их можно рассматривать как часть банка задач для подготовки учащихся к ЕГЭ.

*Эти задачи имеют практический (прикладной) характер.

*Они способствуют формированию научного мировоззрения учащихся.

Приведем цитату из книги В.И. Рыжика [3. С.193], где он дает свою классификацию учебных задач: «Раздел задач - ищем границы... Именно здесь центр учительской деятельности, именно в этом разделе находятся основные учебные задачи. Раньше таковыми были задачи на построение, затем задачи с применением тригонометрии. Сейчас некая пустота, которую уместно занять задачами на отыскание экстремальных ситуаций, в том числе и экстремальных значений. Эти задачи достаточно разнообразны, позволяют сочетать разные математические умения (работа с функцией, решение уравнений и неравенств, тригонометрия), легко варьируется объем работы».

Автором разрабатывается и внедряется в учебный процесс в рамках элективного курса система задач на оптимизацию, связанных с понятием расстояния в пространстве. Анализ результатов позволяет сделать вывод об эффективности перечисленных теоретических положений в практической составляющей подготовки учащихся.

Библиографический список

- 1 Курант, Р. Что такое математика [Текст] / Р. Курант, Г. Роббинс. – М. : Гостехиздат, 1947.
- 2 Рыжик, В.И., О расстоянии вообще и расстоянии между скрещивающимися прямыми в частности [Текст] / В.И. Рыжик // Математика для школьников. – 2007. – №4 и 2008. – №1.
- 3 Рыжик, В.И., 3000 уроков математики [Текст] / В.И. Рыжик, – М.: Просвещение, 2003.
- 4 Натансон, И.П., Простейшие задачи на максимум и минимум [Текст] / И.П. Натансон, – М: Гостехиздат, 1950.
- 5 Потоскуев, Е.В., Звавич, Л. И., Геометрия, 10 класс [Текст] : учебник для классов с углубленным и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л. И.Звавич – М.: ДРОФА, 2004.
- 6 Мартынова, С.Е., Решение стереометрических задач на наименьший периметр сечений методом развертки [Текст] / С.Е. Мартынова // Математика в школе. – 2009. – №8.