

Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина

Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и «предматематической» деятельности

Определяется алгебраический подход к обучению математической и «предматематической» деятельности, состоящий из трех компонентов: 1) система базовых моделей; 2) система преобразований – «операций алгебры моделей»; 3) механизм аппроксимации, представления модели в виде результата применения этих преобразований к базовым моделям. Доказано утверждение о представимости исследовательской стратегии, не использующей инсайт, озарение, в виде комбинации 7 известных базовых исследовательских стратегий.

Ключевые слова: Теория и методика обучения математике, математическое моделирование, математическая модель, стратегия, исследовательская стратегия, алгебра.

Ju.B. Melnikov, K.S. Potorochina

The Algebraic Approach to Mathematical Modeling and Training the Mathematical and "Premathematical" Activity

In the article is defined an algebraic approach to education the mathematical and "confront-mathematical" activity. This approach has three components: 1) the system base models; 2) the system transformations - "operation of the algebra of the models"; 3) the mechanism for approximations, presentations the models in the manner of result of using these transformations to base models. It is proved the statement about presentation the exploratory strategy, not using the insight, in the manner of combinations of the 7 known base exploratory strategies.

Key words: the theory and methods of teaching mathematician, mathematical modeling, mathematical model, strategy, exploratory strategy, algebra.

Основным направлением использования математики является математическое моделирование. Разумеется, мы говорим о «прямом применении» математики, поскольку математика может оказывать значительное «косвенное влияние» на формирование и развитие мировоззрения, эстетику, этику и др. Исследователи традиционно разделяют процесс математического моделирования на этап построения математической модели, этап анализа полученной математической модели и этап интерпретации результата. Основным инструментом анализа математической модели являются математические теории. Уровень абстрактности современных математических теорий таков, что математические модели никогда не описывают непосредственно «реальные объекты», а представляют модели различных предметных областей, т.е. представляют физические, экономические, наглядно-геометрические модели и др., см. рис. 1. Поэтому преобразование «предметной модели» в математическую можно рассматривать как «предматематическую» деятельность, а «предматематикой» назвать механизм этого преобразования.

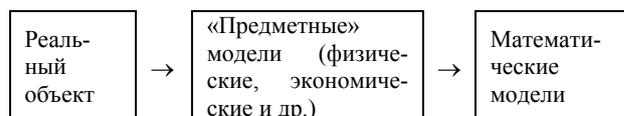


Рис. 1

Примером предматематической деятельности является построение математической модели в рамках решения некоторой текстовой или сюжетной задачи, описывающей практическую ситуацию. Поэтому обычно обучение математическому моделированию пытаются осуществлять в процессе решения именно текстовых или сюжетных задач. Однако этому препятствует жесточайший дефицит времени, не позволяющий при изучении математики отвлекаться на актуализацию знаний (а иногда и изучение нового материала!) по физике, химии, экономике. С целью решения указанной проблемы Ю. Б. Мельниковым и Е. П. Матвеевой [1] предложено осуществлять обучение моделированию с использованием математических объектов в качестве моделируемых (прообразов, прототипов), а не только моделирующих (образов).

В процессе моделирования наименее формализованным является процесс построения но-

вой модели. Этот факт относится как к математической модели, так и (даже в большей степени!) к «предметной» модели, см. рис. 1. Для построения моделей мы предлагаем использовать *алгебраический подход*. Примером реализации алгебраического подхода является построение системы числовых функций. В теории функции действительной переменной рассматриваемые функции обычно строятся в виде комбинации базовых элементарных функций с помощью фиксированного набора преобразований функций (операций «сумма», «произведение», композиция функций и др.). Важной составляющей алгебраического подхода являются механизмы аппроксимирования функции, например, формулы и правила для представления функции с помощью формулы Тейлора, в виде ряда (или частичной суммы ряда) Тейлора или Фурье, в виде интерполяционного многочлена Лагранжа и др. На основе

этого примера можно сказать, что *алгебраический подход* к построению модели состоит, во-первых, в выделении системы базовых моделей, во-вторых, создании набора преобразований («операций алгебры моделей») и, в-третьих, разработке механизма представления (аппроксимации) требуемой модели в виде результата применения этих преобразований (т.е. «операций алгебры моделей») к базовым моделям.

Наша теория моделирования основана на формально-конструктивном определении модели [2, 4], представленном на рис. 2 и табл. 1 и 2. В этом определении отсутствует требование «похожести» моделирующего объекта («модели», «образа») на моделируемый объект (прототип). Для оценки «похожести» развивается *теория адекватности* [5].

Моделируемый объект	Связи между компонентами объектов	Моделирующий объект (модель в традиционной трактовке)		
	Формально-конструктивное определение модели: модель — это система из интерфейсного и модельно-содержательного компонентов, описанных в табл. 1 и 2			
	Интерфейсный компонент модели		Модельно-содержательный компонент модели	
	Грамматики	Аппарат перевода	Носитель	Совокупность характеристик
				Совокупность отношений

Рис. 2. Иллюстрация к формально-конструктивному определению модели.

Таблица 1

Интерфейсный компонент модели

Грамматики		Аппарат перевода
Грамматика языка, в котором представлен моделируемый объект, прототип	Грамматика языка, в котором представлен модельно-содержательный компонент модели	Аппарат перевода с языка представления моделируемого объекта на язык модельно-содержательного компонента модели: словарь, механизм анализа, синтеза и др.

Таблица 2

Модельно-содержательный компонент модели

Носитель	Совокупность характеристик	Совокупность отношений
Множество элементов, из которых состоит моделируемый объект с точки зрения данной модели	Множество функций, область определения каждой из которых включается в декартову степень носителя	Множество отношений на объединении носителя и совокупности характеристик

Для различных областей деятельности формализована система базовых моделей [2. С.66-73]. На совокупности моделей мы определили набор типовых преобразований – «операций алгебры моделей» [2. С.37-62], [3. С. 87-102]: обогащение и редуцирование модели, композиция моделей, развертывание, свёртывание модели и др. Таким образом, для реализации алгебраического подхода осталось разработать аппарат представления требуемой модели в виде результата применения перечисленных преобразований базовых моделей.

В настоящее время разработка универсального механизма представления модели в виде

комбинации базовых моделей с помощью «операций алгебры моделей» нам представляется преждевременной. Но, во-первых, для отдельных типов моделей это вполне возможно. Во-вторых, можно начать с построения «механизма непрямого действия», представленного, например, системой ограничений, требований, принципов и т.д. Например, для вычисления значения величины x «механизм прямого действия» может представлять собой формулу вида $x = \varphi(t)$, а «механизм непрямого действия» - уравнение $\alpha(x, t) = 0$. В шахматной игре к механизмам непрямого действия можно

отнести систему из правил игры и базовых целей (захват центра доски и т.п.), а в качестве механизмов прямого действия можно рассматривать типовые решения шахматных задач (защита Алёхина, защита Каро-Канн и др.).

Рассмотрим алгебраический подход к моделированию деятельности, взяв в качестве базовых моделей деятельности планы деятельности. Носитель этих моделей состоит из пунктов плана. Обычно на совокупности пунктов плана определяются такие отношения, как сравнение по ресурсоемкости (для различных видов ресурсов), предшествование по времени и др. В данной модели рассматриваются характеристики, сопоставление пункту плана, например, априорные и апостериорные оценки времени выполнения этого пункта плана, совокупность требуемых объемов знаний и умений и т.п. Важным примером характеристики, определенной на пунктах плана, является отнесение пункта плана к тому или иному типу. В частности, исполнитель может воспринять пункт плана либо как указание на цель деятельности, способ достижения которой он должен предложить самостоятельно, либо как описание конкретной последовательности действий (цель которых может быть исполнителю неизвестна). Выполнение пункта, воспринятого исполнителем как описание цели, требует от исполнителя высокой квалификации, подразумевающей наличие знаний и умений не только в предметной области, но и в области управления собственной деятельностью. Поэтому построение плана, все основные пункты которого представляют собой описание цели, является относительно несложным. Ориентацию на управление деятельностью учащихся с помощью таких планов можно рассматривать как компонент обучения творчеству, поскольку это требует формирования у обучаемых таких качеств, как самостоятельность, инициативность, ответственность, умение рисковать, работать с ошибками (включая использование методов, использующих преднамеренное совершение ошибки, как в методе доказательства «от противного»).

Исследователи всегда уделяли повышенное внимание творчеству, открытию, «озарению»: изучению закономерностей творческой деятельности, обучению творчеству, оценке творческой деятельности и ее результатов. Например, Д. Пойа [8] уделяет основное внимание закономерностям совершения математических

открытий, обучения и т. п. Исследуются роль и место творчества в различных областях деятельности, функции творческой деятельности. В нашем исследовании мы сосредоточили усилия на деятельности исследователя, носящей рутинный характер, без использования инсайта, озарения.

Рассмотрим деятельность, удовлетворяющую следующим постулатам.

I. Постулат исследовательской цели: *целью исследования является либо построение, корректировка, обогащение или редуцирование модели объекта, существование которого постулируется до начала исследования (объект может быть идеальным), либо доказательство существования или несуществования исследуемого объекта.*

Мы будем считать, что постулат исследовательской цели выполняется даже в случае, когда к началу исследования изучаемый объект существует лишь виртуально. Такая ситуация складывается, например, в ходе проектирования некоторого объекта, когда изучение свойств проектируемого объекта происходит еще до того, как он будет реально построен.

II. Постулат полимодельности: *всякий рассматриваемый объект: 1) является моделью, компонентой или элементом какой-либо компоненты некоторой модели; 2) может быть описан совокупностью моделей, в том числе существенно различных, но обладающих определенным, заранее оговоренным уровнем адекватности.*

III. Постулат алгебраичности: *описание объекта, представленное в типовой, стандартной форме для деятельности в данной области, носит алгебраический характер, т. е. сводится к представлению его с помощью набора типовых базовых объектов (моделей) и системы типовых преобразований объектов.*

IV. Постулат характеристичности: *всякий класс объектов одной природы определяются набором отличительных характеристик и диапазоном предельных значений этих характеристик.*

V. Постулат целенаправленности: *ведущим фактором исследовательской деятельности является динамическая система целей, формирующаяся и развивающаяся в процессе исследования.*

Для моделей деятельности, представленных планами, в качестве механизма создания плана

мы рассматриваем *стратегию* [6]. Заметим, что следует отличать стратегию от реализации (использования) стратегии. В частности, в реализации стратегии ведущим является субъективный компонент, особенности разработчика и исполнителя создаваемого плана.

Утверждение 1. *Если стратегия S используется для создания плана исследования, для которого выполняются постулаты исследовательской цели, полимодельности, алгебраичности, характеристичности, целенаправленности, причем план создается без использования инсайта, то реализация стратегии S может быть представлена в виде комбинации реализаций базовых исследовательских стратегий: стратегии приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций, стратегии поиска аналогии, стратегии предвкушения, стратегии перехода от изучения одного объекта к исследованию системы объектов, стратегии построения модели, стратегии обогащения и редуцирования модели, стратегии смены ролей и приоритетов.*

Обоснование. Из постулата целенаправленности следует, что реализация стратегии S определяется системой целей на каждом шаге ее применения. Согласно постулату исследовательской цели, исследовательская стратегия S применяется для достижения одного из следующих результатов: построение новой модели объекта, существование которого постулируется до начала исследования, обогащение модели, доказательство существования или несуществования объекта (модели).

1) **Случай, когда целью является построение новой модели.** Если создается принципиально новая модель, то ведущими являются стратегия построения модели (на этапе формирования гипотезы) и стратегия предвкушения (на этапе формирования цели и этапе обоснования или доказательства гипотезы). Альтернатива, обусловленная постулатами алгебраичности и полимодельности, состоит в использовании известной системы базовых моделей или обогащении системы базовых моделей и представлении искомой модели в виде результата применения «операций алгебры моделей» к базовым моделям. Для создания плана получения *новых* базовых моделей (в частности, обогащения понятийного аппарата) можно применить

только один из трех способов. Во-первых, можно строить их по аналогии с уже известными моделями, т.е. использовать модели уже известных моделей. Этот метод следует трактовать как результат применения стратегии поиска аналогии и стратегии предвкушения. Во-вторых, в силу постулата характеристичности можно использовать модели, у которых соответствующая характеристика «выражена наиболее явно», т.е. принимает «экстремальные» значения или играет «экстремальную» роль в системе других характеристик. Таким образом, в этом случае применяется стратегия приоритетного изучения «экстремальных» ситуаций. В-третьих, можно построить новую базовую модель M_0 с помощью известных моделей M_1, M_2, \dots , создавая существенно новый носитель и рассматривая характеристики и отношения, индуцированные на M_0 соответствующими характеристиками и отношениями моделей M_1, M_2, \dots . Только две «операции алгебры моделей» могут привести к созданию модели, у которой носитель имеет пустое пересечение с операндами: это агрегатирование и реконструкция модели. Это следует трактовать как результат применения стратегии перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов.

2) **Случай, когда целью является обогащение, редуцирование или корректировка известной модели.** Для этого необходимо ввести в модель новые объекты: элементы носителя, характеристики, отношения, связи в интерфейсном компоненте и, быть может, выполнить редуцирование модели. В случае, когда эти изменения связаны только с особенностями исследуемой модели, без учета взаимодействия исследуемого объекта с другими объектами, «окружающей средой», эти изменения можно рассматривать как результат применения стратегии обогащения и редуцирования модели. Альтернативой является ситуация, когда соответствующие изменения связаны с учетом «внешних связей», взаимодействия моделируемого объекта «с окружающей средой». В последнем случае изменения отражают особенности этой модели как объекта исследования: появление новых целей, новых объектов изучения, новых мотивов и др. В этом случае обогащение, редуцирование или корректировку этой модели следует рассматривать как результат приме-

нения стратегии смены ролей и приоритетов.

В случае, если мы не рассматриваем формирование плана и его частей в результате инсайта, то новые элементы носителя, характеристики, отношения, элементы интерфейсного компонента можно либо индуцировать с помощью других моделей, либо получить в результате моделирования других объектов, с помощью метода аналогии. Таким образом, в случае, когда целью исследования является обогащение, редуцирование или корректировка известной модели, для реализации стратегии обогащения модели и стратегии смены ролей и приоритетов применяется стратегия поиска аналогии, или стратегия перехода от изучения отдельного объекта к системе объектов.

3) **Случай, когда целью является доказательство существования или несуществования объекта.** Доказательство существования может быть конструктивным или косвенным. Конструктивное доказательство представляет собой создание конкретной модели, этот случай рассмотрен выше. Косвенное доказательство существования состоит в получении противоречия в предположении, что искомый объект не существует. На получении противоречия основано и доказательство отсутствия объекта. Для того, чтобы получить противоречие, следует доказать наличие (или отсутствие) некоторого отношения между какими-то элементами модели (элементами носителя, характеристиками или значениями характеристик) и осуществить внутреннее обогащение этой модели до получения утверждения о том, что эти элементы не находятся (или, соответственно, наоборот, находятся) в данном отношении. Таким образом, в этом случае применяются стратегия обогащения и редуцирования мо-

дели, стратегия построения модели или стратегия смены ролей и приоритетов.

Доказательство утверждения закончено.

Аппарат представления процесса построения требуемого плана в виде комбинации базовых исследовательских стратегий может быть основан на системе условий, при выполнении которых применение данной базовой исследовательской стратегии является наиболее перспективным. Например, применение стратегии приоритетного изучения экстремальных ситуаций может быть перспективной в следующих условиях: 1) при необходимости создания и обогащения понятийного аппарата, в особенности когда понятийный аппарат данной области деятельности пока является слишком бедным; 2) требуется выделение новых типовых целей, обогащение проблематики исследования; 3) производится отбор объектов, наиболее перспективных для изучения; 4) осуществляется поиск новых закономерностей в условиях, когда создатель плана по каким-то причинам не использует метод аналогии; 5) создаются новые методы и методики в ситуации, создатель плана по каким-то причинам не использует метод аналогии.

Полученные результаты позволяют рассматривать обучение математической и предметной математической деятельности как обучение процессу составления планов деятельности с помощью исследовательских стратегий. Как было доказано, в рамках алгебраического подхода к моделированию математической деятельности для создания плана исследования достаточно семи базовых исследовательских стратегий. На их основе осуществляется построение, выбор и комбинирование базовых моделей исследуемого объекта. С этой точки зрения наиболее перспективным направлением обучения математической и предметной математической деятельности является обучение студентов выявлению базовых моделей деятельности, моделей исследуемого объекта, выбору приоритетной исследовательской стратегии и ее реализации в рамках решения конкретных задач. Это направление обучения математической деятельности является одной из основ работы [7].

Библиографический список

1. Матвеева, Е.П. Развитие умения осуществлять построение моделей у учащихся при обучении математике в основной школе [Текст]: автореф. дис....канд.наук / Е.П. Матвеева. – Екатеринбург: ГОУ ВПО «Уральский государственный педагогический университет», 2007. - С. 6.

2. Мельников, Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей [Текст]: монография / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское изд., 2004.- 384 с.

3. Мельников, Б.Н. Геотехногенные структуры: теория и практика [Текст]: монография / Б.Н. Мельников, Ю.Б. Мельников. - Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004.- 556 с.

4. Мельников, Б.Н. Диалоговая теория как инструмент интеграции различных научных дисциплин в рамках системного подхода [Текст] / Б.Н. Мельников, Ю.Б. Мельников // Вычислительные технологии – Т. 11, Ч. 3, Специальный выпуск, – 2006. - С. 38-43.

5. Мельников, Ю.Б. Об определении и оценке адекватности модели [Текст] / Ю.Б. Мельников, Г.В. Ваганова, Е.П. Матвеева // Образование и наука, – 2007. –№ 6(10). - С. 3-14.

6. Мельников, Ю.Б. Методологический инструментарий управления исследовательской деятельностью обучаемых [Текст] / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина // Образование и наука, 2008.– № 2(14),...- С. 3-10.

7. Мельников, Ю.Б. Алгебра и теория чисел. Изд. 3-е, испр. и доп. [Электронный ресурс] / Ю. Б. Мельников / Екатеринбург: Изд-во УрГЭУ, 2010 г., 65,1 уч.-изд.л. [режим доступа свободный] <http://lib.usue.ru/resource/free/10/MelnikovAlgebra3/index.html>

8. Пойа, Д. Математическое открытие. Изд. второе, стереотипное [Текст] / Д. Пойа. - М.: Наука, 1976. - 448 с.