УДК 517.3

А.Е. Малых

Из истории биномиальной теоремы

В статье показан исторический процесс развития биномиальной теоремы в средние времена и до XIX столетия. Представлен вклад индийских учёных, стран ислама и Западной Европы. Основное внимание уделено исследованию И.Ньютона по расширению биномиальной теоремы на случай дробных и отрицательных показателей степеней. Благодаря этой теореме от биномиального ряда он в конечном счёте пришёл к своему интегральному исчислению. Отмечены и другие приложения биномиальной теоремы.

Ключевые слова: степень бинома, треугольник Паскаля, биномиальный ряд, сочетание, биномиальные коэффициенты, разностные ряды, интерполирование, индукция, конечные разности, аналогии, интеграл, функции

A.E. Malykh

Out of History of the Binomial Theorem

The article shows a historical process of development of the binomial theorem from a middle times up to the XIX century. The contribution of Indian, Islamic and Western European scientist is presented. Primary attention is spared to investigation by I.Newton to enlarge the theorem to the case of fractional and negative binom’s exponents. Due to this theorem from the binomial series he discovered an integral calculation. Other applications of the binomial theorem are also indicated.

Key words: Binom’s degree, triangle of Pascal, a binomial series, combinations, binomial coefficients, difference series, interpolation, integral, function, analogy, finite differences, induction.

Известно, что комбинаторные задачи издавна формировались в тесной связи с потребностями арифметики и алгебры. В XVII в. на смену разрозненной их совокупности пришло общетеоретическое рассмотрение.

Столь же существенно, без логических скачков описывались правила нахождения коэффициентов разложения целочисленной степени бинома. Постепенно увеличивалось количество способов определения биномиальных коэффициентов при помощи таблиц, принявших впоследствии вид арифметического треугольника.

Биномиальное разложение для n, равного 2, по всей видимости, появилось настолько давно, что невозможно выяснить его происхождение.

В геометрической алгебре пифагорейцев (VI-V вв. до н.э.) рассматривались тождества для биномов и апотомов: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Эти же случаи описал в «Началах» (III в. до н.э.) Евклид (кн. II, пред. 4). Разложение третьей степени бинома исчерпывающим образом представлено в работах индийского ученого Брахмагупты (598-626). Индусы интересовались правилом извлечения корней n-й степени и для небольших значений n разработали методы, основанные на разложении разности $(a + b)^n - a^n$. В русле этих исследований они должны были уметь находить биномиальные коэффициенты, что подтверждается отрывками из работ Омара Хайяма, написанных около 1100 г.: «Индусские методы нахождения сторон квадратов и кубов основаны… на знании квадратов девяти чисел 1, 2, …, 9 вместе с их произведениями, образованными при перемножении их друг с другом, двух и трех одновременно. Я написал работу, которая устанавливает корректность этих методов, и … расширил метод для случая 4, 5, 6, … корней [столь высоких, как пожелаете], которого до сих пор не было. Доказательства я дал… чисто арифметические, основанные на арифметике «Элементов» [Евклида]» [1. С. 218].

Сведения, содержащиеся в статье Singh A.N., утверждавшего, что арифметический треугольник был известен Пингале еще во II в. до н.э., нуждаются в проверке. Вполне возможно, что свои результаты он получал путем простого перечисления шести различных вкусовых оттенков [2. С.623].

В средневековой *исламской математике* биномиальная теорема появилась у Абу-л-

© Малых А.Е., 2010

Вафы ал-Бузджани (X в.), из трактата которого следует, что он знал правило извлечения корней $3, 4, \ldots, 7$ степеней. Ал-Караджи (ум. $\approx$1029) также были известны коэффициенты при разложении двучлена для $n = 3, 4$.

В гл. I кн. II ас – Самав'ала (XII в.) «Блестящая [книга] о науке арифметике» доказывается биномиальная теорема для $n = 3, 4, 7$, а в п.8 даны формула бинома и таблица нахождения биномиальных коэффициентов для $n = \overline{1, 12}$. (табл.I).

Таблица I

Кубо-кубо-кубо-куб	Квадрато-кубо-куб	Квадрато-квадрато-кубо-куб	Кубо-кубо-кубо-куб	Квадрато-кубо-куб	Квадрато-квадрато--куб	Кубо-куб	Квадрато-куб	Квадрато-квадрат	куб	квадрат	вещь
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	
220	165	120	84	56	35	20	10	4	1		
495	330	210	126	70	35	15	5	1			
792	462	252	126	56	21	6	1				
924	462	210	84	28	7	1					
792	330	120	36	8	1						
495	165	45	9	1							
220	55	10	1								
66	11	1									
12	1										
1											

Разложение степеней бинома вплоть до $n = 12$ выполнил Насир Эд-Дин ат-Туси (ум. 1274) в «Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли» (1265). Он пользовался арифметическим треугольником при извлечении корней любой натуральной степени, а сама процедура была скорее техническим новшеством, чем открытием. Его метод по существу совпадал с предложенным Гиясэддином Джемшидом ал-Каши (XIV-XV вв.) [1. С. 33-34]. Последний записывал все промежуточные выкладки в одной таблице, в то время как ат-Туси их стирал. Вполне возможно, что метод отыскивания целой части корня степени n, как и правило бинома, имеет китайское происхождение [3. С. 81-84. С. 88-89. С. 232], так как известно, что среди сотрудников ат-Туси в руководимой им Марагинской обсерватории имелись и китайские астрономы. Однако у математиков стран арабского халифата не прослеживается мысли об идентичности биномиальных коэффициентов и чисел сочетаний.

С созданием арифметического треугольника связаны также работы китайских ученых. И. Нидем воспроизвел треугольник в таком виде, как был дан великим алгебраистом того времени Чжу Ши-Цзе в «Яшмовом зеркале четырех элементов» (1307) [3. С. 135]. На титульном листе приведены коэффициенты до седьмой степени включительно. Сам ученый не претендовал на новизну своей таблицы, предполагая, что биномиальная теорема была уже известна китайцам по крайней мере в начале XII в. Согласно Ян Хуэю (XIII в.), ею располагал, хотя и в меньшем объеме, Цзя Сянь. Около 1100 г. он написал сочинение «Объяснение таблиц цепного метода извлечения корней», в котором, по словам Ян Хуэя, извлекал корни четвертой степени и был знаком с треугольной записью коэффициентов. Возможно, такая запись впервые была описана его современником Лю Жусе в не дошедшей до нас книге «Возрастание степени и открытие коэффициентов». Еще раньше в трактате о кубических корнях Цзю Чжан ($\approx$VI в.) рассмотрел случай $n = 3$ [3. Ч.2. С. 7. С. 13. С. 96].

В Западной Европе арифметический треугольник стал известен лишь в XVI в., когда был помещен на титульном листе книги Апиано (1527) [4]. Вслед за ним М. Штифель в «Курсе арифметики» (1544) составил таблицу биномиальных коэффициентов в разложении n-й степени бинома ($n \leq 17$) [5]. Находил он их следующим образом: при умножении $(x + a)^n$ на $(x + a)$ получается $(x + a)^{n+1}$; тогда коэффициент при члене, содержащем $x^{n-m} \cdot a^m$,определяется суммой коэффициентов при $x^{n-m} \cdot a^m$ и $x^{n-m-1} \cdot a^{m+1}$ в разложении $(x + a)^n$. Таким образом, ученый знал рекуррентную зависимость $C_{n+1}^{m+1} = C_n^{m+1} + C_n^m$. Основываясь на ней, Штифель последовательно получал биномиальные коэффициенты и помещал их в таблицу. Они понадобились ему, как и ученым стран ислама XI-XIV вв., для вычисления дробной части корня n-й степени из целого числа по формуле $\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \dfrac{r}{(a+1)^n - a^n}$.

Вслед за Штифелем арифметический треугольник был получен Шеубелем (1549). Т. Гарриот (1560-1621) в «Artis Analytical Praxis» использовал символическую запись для произведения четырех биномов:

$$\begin{array}{lcccccccccc}
a-b & = & aaaa & - & baaa & + & bcaa & & & & \\
a-c & & & - & caaa & + & bdaa & & & & \\
a-d & & & - & daaa & + & bfaa & - & bcda & & \\
a-f & & & - & faaa & + & cdaa & - & bcfa & & \\
 & & & & & + & dfaa & - & cdfa & + & bcdf.
\end{array}$$

Следует заметить, что уже со времен Штифеля было известно получение биномиальных коэффициентов как членов таких разностных рядов, для которых рядом 1-го порядка является ряд натуральных чисел (перед ним предполагается еще ряд, состоящий из единиц); соответствующий ряд 2-го порядка составлен из треугольных чисел, 3-го – из пирамидальных… Последователь Штифеля в Германии ульмский математик И. Фаульгабер (1580-1635) в «Продолжении нового чудесного искусства» (1617) привел без доказательства значения для суммы степеней m первых восьми чисел натурального ряда, где $m = \overline{1, 11}$, а затем в «Школе алгебры» (1631) – для $m = \overline{1, 17}$ [6]. Н. Тарталья, ознакомившись с работой Штифеля, в «Общем трактате о числе и мере» (1556) [7] придал таблице другой вид (табл. II). Коэффициенты разложения степени бинома расположены вдоль диагонали, соединяющей соответствующие номера строк и столбцов. Треугольник, отсеченный такой диагональю, впоследствии стал известен как треугольник Паскаля.

Таблица была нужна Тарталье для нахождения количества существенно различных выпаданий в случае 1, 2, … игральных костей и составлена для $n = \overline{1, 8}$.

Таблица II

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462
1	8	36	120	330	792

Ряд биномиальных соображений находится в «Новом труде о пропорциональностях» (1570) Дж. Кардано (1501-1576), где автор ввел со ссылкой на Штифеля биномиальные коэффициенты. Вслед за этим арифметический треугольник получил повсеместное распространение.

Так, Р. Бомбелли (≈ 1526-1573) в своей «Алгебре» [8. С. 65] привел разложение бинома до $n = 7$, используя коэффициенты при вычислении соответствующих корней, а У. Оутред (1574-1660) нашел такие коэффициенты до $n = 10$ включительно (1631). Курс математики П. Эригона (1634) содержит треугольник как основной элемент в разложении бинома, а также формулу для нахождения числа сочетаний. Однако их связь с треугольным расположением чисел еще четко не прослеживается [9].

Интересно заметить, что расположением чисел, аналогичным арифметическому треугольнику, пользовался и Ф. Виет (1540-1603) для представления и последовательного получения коэффициентов при неизвестных в задаче деления окружности и угла на m равных частей.

Систематическое и обоснованное изложение свойств числа сочетаний находится в «Трактате об арифметическом треугольнике» (1665) Блеза Паскаля (1623-1662). Хотя сам треугольник новостью не являлся, но основной заслугой автора, как удалось установить, является то, что числа таблицы у него выступают как C_n^m с четким изложением их свойств, соотношений членов разностных рядов и биномиальных коэффициентов. Все они снабжены необходимыми доказательствами.

Трактат начинается с построения арифметического треугольника и изучения его свойств, каждое формулируется в виде следствия, которому дается строгое доказательство. Таких следствий − 19: 11 касаются чисел, расположенных в клетках, и 8 − их отношений. Графическое изображение придает им общее выражение и обоснование. Так, число, стоящее в (m + 1)-й строке и (n + 1)-м столбце, Паскаль по существу определяет как C_{m+n}^m. В заключении трактата ученый приходит к мультипликативному представлению числа сочетаний, получившему впоследствии широкую известность.

Следует обратить внимание на то, что при доказательстве своих следствий Паскаль по существу использовал метод полной математической индукции. Пока остается невыясненным, повлиял ли на него Ф. Мавролико (1494-1575), пользовавшийся этим методом в сочинении «Две книги по арифметике» (1575). В дальнейшем метод нашел приложения, в частности, при возведении многочлена в натуральную степень, когда Абрахам де Муавр (1667-1754) опубликовал теорему, используя метод неопределенных коэффициентов (1697, 1698). Однако еще раньше (1678) она была известна Г.В. Лейбницу (1646-1716). По глубине изложения, объему сведений о сочетаниях Паскаль превзошел своих современников и последователей, в том числе Г.В. Лейбница и Я. Бернулли.

Интерес к биномиальной теореме появился вновь в последней трети XVII столетия в связи с проблемой разложения функций в бесконечные ряды. Введение последних имело для развития математического анализа не меньшее значение, чем разрабатывавшиеся методы для нахождения квадратур или касательных и экстремумов.

Первую работу такого рода опубликовал в 1668 г. Николай Меркатор (Кауфман) ($\approx$1620-1687). Он получил разложение логарифмической функции $\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots$ почленным интегрированием [бесконечно убывающей геометрической] прогрессии $1-x+x^2-\ldots=\frac{1}{1+x}$. Близко подошел к открытию биномиального ряда профессор геометрии Оксфордского университета, один из основателей Лондонского Королевского общества (1663) Джон Валлис (1616-1703). В своем «Трактате по алгебре» (De algebra tractatus) он вплотную подошел к открытию биномиального ряда [11]. Основным пунктом исследования ученого было рассмотрение квадратур, соответствующих интегралам вида $\int_0^1 \left(1-x^2\right)dx$ при целых положительных n. Используя интерполирование, он получил $\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx.$

Неполная математическая индукция привела его к обобщению результата на все дробные, а затем и отрицательные показатели степени. Своими работами ученый подготовил почву для расширения понятия степени бинома, которое вскоре было выполнено Исааком Ньютоном. Впоследствии было установлено, что биномиальный ряд впервые появился в работе «Arithmetica Logarithmica», опубликованной английским ученым Генри Бриггсом ($\approx$1566-1630) еще в 1620 году.

К числу первых исследователей, приблизившихся к биномиальному разложению, можно отнести и Джеймса Грегори (1638-1676) – шотландского математика и астронома, члена Лондонского Королевского общества (с 1668). Для вычисления площадей криволинейных фигур он, вслед за М. Меркатором и И. Ньютоном, пользовался рядами. Грегори почти одновременно с последним и независимо от него доказал биномиальную теорему, а также выполнил разложения в степенные ряды функций *arctg x, sec x, ln tg x, ln sec x,* $\ell n\frac{1+x}{1-x}$.

Следует отметить еще, что Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) в 1695 г. записал разложение бинома в виде

$$\sqrt[m]{y+a} = y^m + \frac{m}{1}y^{m-1}a + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}y^{m-2}a^2 + \dots . \qquad (1)$$

История биномиальной теоремы еще раз убеждает нас в том, что всякое важное открытие не возникает неожиданно в голове исследователя, а подготавливается долгой, часто безвестной работой его предшественников. Сам И. Ньютон как-то заметил, что не достиг бы своих эпохальных открытий, если бы не стоял на плечах гигантов.

Фундаментальным событием в истории математики явилось открытие общего биномиального ряда, к которому в 1664-1665 гг. пришел Исаак Ньютон (1643-1727). В его письме от 13 (23) июня 1676 г., адресованном ученому секретарю Лондонского Королевского общества графу Г. Ольденбургу и предназначенном для Г.В. Лейбница, автор записал общее биномиальное разложение в виде:

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots , \qquad (2)$$

где $P + PQ$ – величина, для которой требуется найти корень или степень, или корень из ее степени; P – первый член величины; Q – совокупность остальных членов, деленных на первый; $\frac{m}{n}$ – показатель степени (целый, дробный, положительный или отрицательный); A, B, C, … – последовательно полученные значения: $A = P^{\frac{m}{n}}$; $B = \frac{m}{n}AQ$; $C = \frac{m-n}{2n}BQ$ и т.д. [12].

Ньютон не указал никаких формальных доказательств своего допущения. По-видимому, Лейбниц в ответном письме попросил ученого сообщить о ходе рассуждений при получении формулы (2). В ответном письме от 24 октября 1676 г., посланном также через Г. Ольденбурга, Ньютон указал, что к такому выводу его привело изучение работ Валлиса, который использовал интерполирование и аналогии, вычисляя площади фигур, связанных с окружностью и гиперболой. Ученый пояснил, что с помощью индукции, проведенной в духе Валлиса, он пришел к открытию мультипликативного правила составления биномиальных коэффициентов. Заметим, что такое правило знал уже Шридхара (IX-X в.), описавший его в своей «Патиганите», а также, как было отмечено выше, Б. Паскаль. В отличие от Валлиса Ньютон рассматривал, как сказали бы теперь, интегралы с верхней границей интегрирования. Ньютон стал находить площади криволинейных трапеций, заданных графиками функций на отрезке [*O, x*].

В современных обозначениях такими функциями являются:

$$y_0 = \left(1-x^2\right)^{\frac{0}{2}};\ y_1 = \left(y-x^2\right)^{\frac{1}{2}};\ y_2 = \left(1-x^2\right)^{\frac{2}{2}};\ y_3 = \left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}, \dots . \qquad (3)$$

Для четных индексов легко описать площади:

$$S_0 = x;\ S_2 = x - \frac{1}{3}x^3;\ S_4 = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x_5;\ S_6 = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \ldots . \qquad (4)$$

Относительно (4) Ньютон заметил, что в представленных суммах знаки слагаемых чередуются. Далее, все первые слагаемые равны x, коэффициенты при вторых членах образуют арифметическую прогрессию $\frac{0}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{3}{3}; \ldots$ Ввиду того, что все показатели степеней исходных функций в (3) также составляют арифметическую прогрессию, то два первых слагаемых в суммах с нечетными индексами S_1, S_3, S_5, … являются средними арифметическими соответствующих слагаемых соседних сумм: $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3};\ x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3};\ x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}; \ldots$. Затем Ньютон заметил, что знаменатели слагаемых в каждой из сумм с четными номерами образуют арифметическую прогрессию с разностью 2: 1, 3, 5, 7, … В связи с этим он писал: «…остается исследовать только числовые коэффициенты числителей. Последние же представляют собой для следующих через одну данных площадей цифры степеней числа 11, а именно 11^0; 11^1; 11^2; 11^3; 11^4, т.е. во-первых, 1; затем 1 и 1; в-третьих, 1, 2, 1; в-четвертых, 1, 3, 3, 1, в-пятых, 1, 4, 6, 4, 1 и т.д. Поэтому я принялся искать, как можно вывести в этих рядах из данных двух первых цифр остальные, и нашел, что если положить вторую цифру m, то остальные получаются посредством постоянного перемножения членов следующего ряда

$$\frac{m-0}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$ и т.д.» [12. С. 234].

Ньютон заметил, что в S_1 второй член равен $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, поэтому, полагая $m = \frac{1}{2}$, вычислил коэффициенты для последующих членов этой суммы:

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}-1}{2} = -\frac{1}{8};\ -\frac{1}{8}\cdot\frac{\frac{1}{2}-2}{3} = \frac{1}{16};\ \frac{1}{16}\cdot\frac{\frac{1}{2}-3}{4} = -\frac{5}{128},\ \ldots$. Тогда для S_1 он получил:

$$S_1 = x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}\ldots$$

. Дифференцируя обе части последнего равенства, Ньютон пришел к равенству $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} - \ldots$. Для проверки своего результата ученый умножил ряд на себя. Так как ряд сходящийся, то эту операцию можно осуществить, получив в результате тождество $1 - x^2 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{8} + \ldots$. Этот и остальные восемь приведенных примеров убедили Ньютона в верности подмеченного правила образования коэффициентов. Таким образом, разложение рациональной степени бинома в ряд было найдено. Для произвольного c оно имеет вид:

$$\left(a-x\right)^c = a^c + c\ a^{c-1}\ x + \frac{c(c-1)}{2}a^{c-2}x^2 + \frac{c(c-1)(c-2)}{2\cdot 3}a^{c-3}x^3 + \ldots . \qquad (5)$$

Самим Ньютоном формула (5) доказана не была. Его мемуар «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», посвященным квадратурам различных кривых, был опубликован лишь в 1741 г. Сам же «Анализ», написанный около 1665 г., в силу некоторых личных мотивов Ньютон не хотел издавать и лишь по настоятельной просьбе И. Барроу послал рукопись ученому книготорговцу Коллинсу для ознакомления через него с его содержанием более широких кругов научной общественности. Среди знавших о ней специалистов работа уже тогда привлекла внимание, но большой известности не приобрела, так как не была опубликована.

Свою формулу Ньютон считал одной из самых значительных проблем, которую только мог надеяться решить. От нее он в конечном счете пришел к своему интегральному исчислению.

На протяжении XVIII в., например, у Л. Эйлера (1707-1783) из биномиального разложения следовала вся теории рядов. Ученый называл биномиальные коэффициенты «характеристиками». Его выводы рядов для элементарных функций повторил в 1821 г. Огюстен Коши (1789-1857), установив дополнительно интервал сходимости биномиального ряда. Исчерпывающее исследование биномиального ряда выполнил Нильс Генрих Абель (1802-1829). Оно послужило началом формирования степенных рядов в комплексной области (1826).

Систематическое исследование огромного числа новых функций оказалось возможным только благодаря их представлению как сумм бесконечных степенных рядов и, начиная с 60-70 гг. XVII в., стало столь же необходимым орудием ученых, как и бесконечно малые величины, умение дифференцировать и интегрировать степенную функцию вместе с ее представлением суммой степенного ряда. Все это открывало пути к решению множества труднейших задач и постановке все новых и новых вопросов.

Обобщение биномиальной теоремы на случай полиномиальной также имеет богатую историю и многочисленные приложения. Однако изучение этого процесса представляет другое исследование.

Библиографический список

1. Ал-Каши, Г.Д. Ключ арифметики. Трактат об окружности [Текст] / пер. Б.А.Розенфельда, комментарии А.П. Юшкевича, Б.А. Розенфельда. – М.: Гостехиздат, 1956.
2. Singh A.N. On the use of series in Indian Mathematics //Osiris, 1936. − V. 1. −P. 606-628.
3. Needham J. Science and Civilisation in China. History of Scientific Thought. − V.2. − Mathematics and Sciences of the heaven and Earth. – London, 1959.
4. Apianus P.E. Arithmetic. − Jngöldstadt, 1527.
5. Stifel M. Arithmetica Integra. – Norimbergae, 1544.
6. Faulhaber J. Academia algebrae. – Ülmi, 1631.
7. Tartaglia N. General Trattato di numeri et misure. − Venetia, 1556.
8. Bombelli R. Algebra. − Bologna, 1572.
9. Herigone P. Cursus Mathematicus: Arithmetica Practica. Algebra. − Paris. 1634.
10. Pascal B. Traite du Triangle Arithmetigue. – Oeuvres. − Paris, 1908. – T.3.
11. Wallis J. Opera mathematica. – Oxford, 1695-1699. – V. 1-3.
12. Ньютон, И. Математические работы [Текст]. / пер. и комментарии Д. Мордухай-Болтовского. – М.-Л.: ОНТИ, 1937.