УДК 517.9

**А.С. Безручко**

## Изучение устойчивости решений дифференциальных уравнений как средство повышения математической культуры студентов

В статье рассматривается вопрос влияния устойчивости и направления движения на поведение интегральных кривых вблизи вырожденного узла. Приведен пример, иллюстрирующий это.

**Ключевые слова:** Особые точки дифференциального уравнения, вырожденный узел, устойчивость особой точки, направления движения, семейство интегральных кривых

**A.S. Bezruchko**

## Learning Stability of Differential Equations Solutions as a Means of Increasing Students' Mathematical Culture

In the paper the problem of influence of a stability and a driving direction on behaviour of integral curves near a degenerated unit is considered. The example illustrating it is represented.

**Key words:** singular points of the differential equation, degenerated unit, a stability of a singular point, a driving direction, the set of integral curves.

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов математики, занимающих почетное место в современной науке. Она представляет собой богатый содержанием быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими ее разделами и приложениями.

Новые усовершенствования и открытия в приложениях и в других областях математики являются движущей силой развития теории дифференциальных уравнений. Кроме того, вместе с ней подлежат развитию и ее разделы, многие из которых в настоящее время стали самостоятельными науками.

Изучение особых точек и особых решений дифференциальных уравнений имеет большое значение как для прикладных задач, так и для дальнейшего изучения теории дифференциальных уравнений. В частности, исследование поведения семейства интегральных кривых в окрестности особой точки составляет один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений и играет важную роль в вопросах устойчивости движения.

Одной из особых точек, которая имеет несколько разновидностей, является узел. В зависимости от дифференциального уравнения и корней характеристического уравнения он может быть просто узлом, вырожденным или дикритическим узлом. На построение дикритического и простого узла не влияет направление движения. При построении вырожденного узла в зависимости от направления движения поведение интегральных кривых меняется. Исходя из этого, построение вырожденного узла является более сложной задачей и может вызвать затруднения. Приведем пример, в котором поведение интегральных кривых, вблизи вырожденного узла в большей степени будет зависеть от устойчивости и направления движения.

*Пример.* Найдите и исследуйте особые точки следующих дифференциальных уравнений и сопоставьте интегральные кривые каждого дифференциального уравнения с рисунками 1-4.

$$y' = \frac{-2x+y}{-3x+2y}, \qquad y' = \frac{2x-3y}{x-2y},$$

$$y' = \frac{x+y}{3x-y}, \qquad y' = \frac{-x+3y}{x+y}.$$

© Безручко А.С., 2010

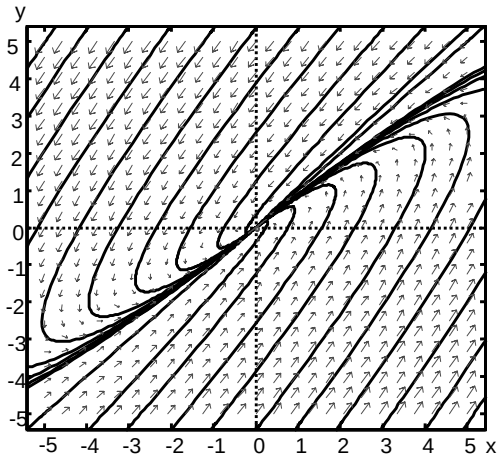


**Рис.1**

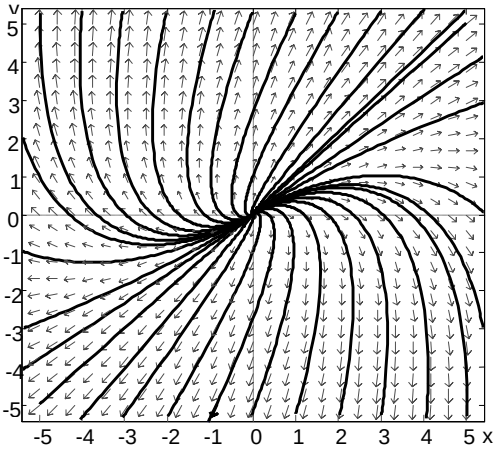


**Рис.2**

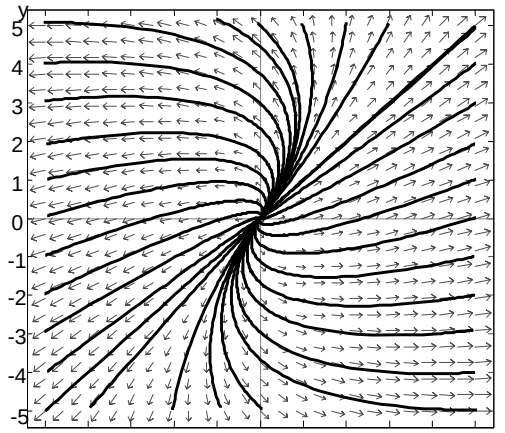


**Рис.3**

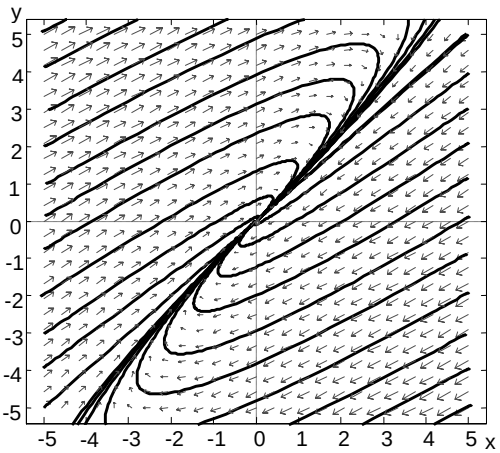


**Рис.4**

*Решение:*

1. $y' = \dfrac{-2x + y}{-3x + 2y}$

Это уравнение с дробно линейной правой частью, которое имеет единственную особую точку $x = 0 \quad y = 0$, так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность «ноль на ноль» Исследуем эту особую точку. Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1\text{-}\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 = 0,$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \quad (\lambda+1)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$, следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов нашего уравнения. Остальные кривые будут касаться этой прямой вблизи особой точки. По определению собственного вектора, этот вектор таков, что он должен удовлетворять следующему условию:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ cx_1 + (d-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}.$$

Следовательно, для $\lambda = -1$ имеем $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Данному значению $\lambda$ будет соответствовать собственный вектор $(1,1)$, а искомая прямая, проходящая через особую точку, будет направлена вдоль него.

При исследовании поведения, интегральных кривых вблизи вырожденного узла встает вопрос о направлении движения. Воспользуемся тем, что интегральные кривые дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ совпадают с траекториями системы $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=Q(x,y),\\ \frac{dy}{dt}=P(x,y);\end{cases}$.

Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-3x+2y,\\ \frac{dy}{dt}=-2x+y.\end{cases}$

Исследуем вопрос о направлении траекторий движения данной системы. Строим в любой точки, например $(1,0)$, вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной системы он равен $(-3x+2y,\ -2x+y)$. В точке $(1,0)$ получаем вектор $(-3,-2)$. Следовательно, убыванию $t$ соответствует движение по траекториям часовой стрелки. Так как $\lambda<0$, то особая точка будет асимптотически устойчива.

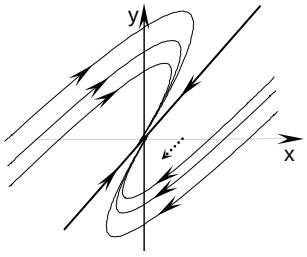

**Рис.5**

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис.5). Точками обозначен вектор скорости. Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис.4.

2. $y'=\frac{2x-3y}{x-2y}$.

Это уравнение с дробно линейной правой частью, которое имеет единственную особую точку $x=0\quad y=0$, так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность «ноль на ноль» Исследуем эту особую точку.

Составим характеристическое уравнение и решим его

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad (1-\lambda)(-3-\lambda)+4=0,$$

$$\lambda^2+2\lambda+1=0,\ (\lambda+1)^2=0,\ \lambda_1=\lambda_2=-1$$

Так как $\lambda_1=\lambda_2=\lambda=-1$, следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора, матрицы $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя вышеприведенное определение собственного вектора, получим систему для $\lambda=-1$ имеем $\begin{cases}2x_1-2x_2=0,\\ 2x_1-2x_2=0;\end{cases}\Leftrightarrow x_1=x_2$. Данному значению $\lambda$ будет соответствовать собственный вектор $(1,1)$.

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-2y,\\ \frac{dy}{dt}=2x-3y.\end{cases}$. Строим в точке $(1,0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной системы он равен $(x-2y,\ 2x-3y)$. В точке $(1,0)$ получаем вектор $(1,2)$. Следовательно, убыванию $t$ соответствует движение против траекторий часовой стрелки. Так как $\lambda<0$, то особая точка будет асимптотически устойчива.

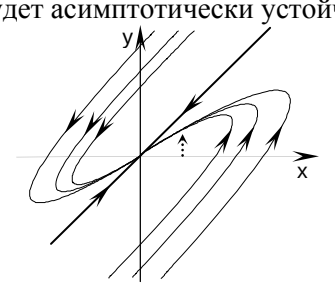

**Рис.6**

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (Рис.6). Сопоставляя наш

схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис.1.

3. $y' = \dfrac{x+y}{3x-y}$

Это уравнение имеет единственную особую точку $x=0 \quad y=0$, так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность «ноль на ноль». Исследуем эту особую точку

Составим характеристическое уравнение и решим его

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (3-\lambda)(1-\lambda)+1=0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad (\lambda-2)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя вышеприведенное определение собственного вектора, получим систему для $\lambda = 2$ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Данному значению $\lambda$ будет соответствовать собственный вектор $(1,1)$.

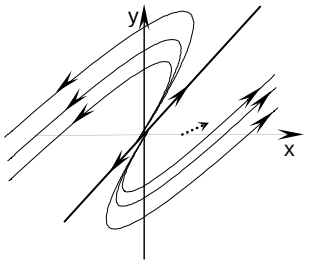


**Рис.7**

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения

к системе $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

Строим в точке $(1,0)$ вектор скорости $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной системы он равен $(3x-y,\ x+y)$. В точке $(1,0)$ получаем вектор $(3,1)$. Следовательно, убыванию $t$ соответствует движение против траекторий часовой стрелки. Так как $\lambda > 0$, то особая точка будет асимптотически неустойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис.7). Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис.3.

4. $y' = \dfrac{-x+3y}{x+y}$

Это уравнение имеет единственную особую точку $x=0 \quad y=0$, так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность «ноль на ноль». Исследуем эту особую точку.

Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1-\lambda)(3-\lambda)+1=0,$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0, \quad (\lambda-2)^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы , составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя определения собственного вектора, получим систему для $\lambda = 2$, имеем

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Данному значению $\lambda$ будет соответствовать собственный вектор $(1,1)$.

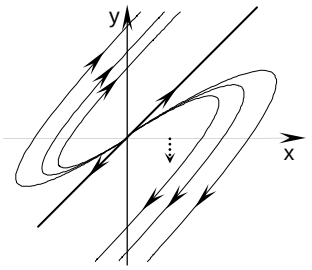


**Рис.8**

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$

Строим в точке $(1,0)$ вектор скорости $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной системе он равен $(x + y,\ -x + 3y)$. В точке $(1,0)$ получаем вектор $(1,-1)$. Следовательно, убыванию $t$ соответствует движение по траекториям часовой стрелки. Так как $\lambda > 0$, то особая точка будет асимптотически неустойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (Рис.8). Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис.2.

В данном примере проведено исследование четырех дифференциальных уравнений, у которых одинаковы координаты особых точек и собственные векторы. Различия состоят в устойчивости и направлении движения, вследствие чего для учащихся наглядно видна важность учета устойчивости точки и направления движения. Данный пример также позволяет увидеть истинное поведение семейства интегральных кривых, которое может отличаться от сделанного эскиза.

### Библиографический список

1. Пушкарь, Е.А. Дифференциальные уравнения в задачах и примерах [Текст]: учебно-методическое пособие. - М.:МГИУ,2007.-158 с.

2. Чебан, Д.Н. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Руководство к решению задач [Текст]: учебное пособие.- Кишинев: Молдавский госуниверситет, 2001