

Н.П. Федотова

О расстоянии до многогранников некоторого класса в симметрических нормах

Данная работа посвящена изучению расстояний до многогранников некоторого класса в пространстве R^n с различными симметрическими нормами. Описаны все гиперплоскости, для которых для всех многогранников некоторого вида точка минимума евклидовой нормы является точкой минимума любой другой симметрической нормы.

Ключевые слова: Норма, евклидова норма, симметрическая норма, расстояние, гиперплоскость, класс многогранников, класс гиперплоскостей, пространство R^n .

N.P. Fedotova

About the Distance to Polyhedrons of Some Class in Symmetric Norms

This paper is devoted to the minimum distance between a point and a polyhedrons of some class in R^n vector space supplied with different symmetrical norms. We find all hyperplanes for which all polyhedrons the point of Euclidean norm's minimum is also one of the nearest points in any symmetrical norm.

Key words: Norm, Euclidean norm, symmetrical norm, distance, hyperplane, class of hyperplanes, class of polyhedrons, R^n space.

Введение

Известно [1] следующее свойство гиперплоскости $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ n -мерного пространства:

для любого многогранника вида $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в этой гиперплоскости существует точка этого многогранника, в которой достигается минимум любой симметрической нормы.

Данная теорема может быть использована при решении различных дискретных и оптимизационных задач. Она позволяет выбрать наиболее удобный критерия оптимизации – евклидову норму, что значительно упрощает вычисления в ряде случаев. Более того, можно выписать общий вид решения и свести задачу к перебору конечного числа критических точек. Примерами дискретных задач с соответствующими условиями могут быть задача о целочисленном сбалансировании матрицы, задача о равномерном назначении работ, которые описаны в [2, 3].

В данной статье будем рассматривать многогранники вида $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) в пересечении с различными гиперплоскостями и называть их многогранниками вида D.

Будем говорить, что свойство U выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или мно-

гогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметрической нормы.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U.

Замечание 1.

Гиперплоскость (и многогранник вида D) в евклидовой норме имеет единственную точку экстремума. Поэтому определения свойства U и униэкстремальности корректны.

Замечание 2.

Гиперплоскость $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ обладает свойством U и униэкстремальна. Следовательно, гиперплоскость $\sum_{i=1}^n kx_i = 0$ тоже обладает свойством U и униэкстремальна. Чтобы не делать эту оговорку каждый раз, будем считать, что в уравнении гиперплоскости есть хотя бы один коэффициент, равный единице (поскольку все коэффициенты не могут быть равны нулю одновременно по определению гиперплоскости).

Замечание 3.

Можно сказать, что свойство униэкстремальности сильнее, чем свойство U. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть любой многогранник вида D, содержащий экстремальную точку гиперплоскости в норме L_2 .

В данной работе исследуются

1. Все униэкстремальные гиперплоскости в пространстве R^n . Раздел «Униэкстремальные гиперплоскости».

2. Возможность расширения класса униэкстремальных гиперплоскостей, за счет наложения ограничений на симметрическую норму. Раздел «Специальная симметрическая норма».

Результаты

Теорема 1. Униэкстремальными являются все гиперплоскости вида:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^k x_i = c, \quad x_i = \alpha_i, i = k+1, k+2, \dots, n,$$

где k -произвольное число, $1 \leq k \leq n$.

Теорема 2. Никакие другие гиперплоскости пространства R^n , кроме обозначенных в теореме 1, не являются униэкстремальными.

Теорема 3. Любая униэкстремальная гиперплоскость размерности $(n-1)$ в пространстве R^n имеет вид:

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n x_i = const,$$

и каждая гиперплоскость n -мерного пространства, имеющая вид (2), униэкстремальна.

Теорема 4. Любая униэкстремальная гиперплоскость размерности $(n-1)$ пространства R^n со специальной симметрической нормой имеет вид:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = const, \text{ где}$$

$$(\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, i=1, 2, \dots, n).$$

Справедливо обратное утверждение.

Вспомогательные утверждения

Утверждение 1.

На любой гиперплоскости вида:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^k x_i = c, \quad x_i = \alpha_i, i = k+1, k+2, \dots, n$$

минимум расстояния до начала координат во всех симметрических нормах достигается в

точке $E(c/k, \dots, c/k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$ независимо от значений c, k, α_i .

Схема доказательства: предположим, что найдутся такие точка F и норма N, для которых верно $N(F) < N(E)$; переставляя по циклу координаты точки F, получим K точек; возьмем точку с координатами, равными среднему арифметическому соответствующих координат K точек; в этой точке норма будет не больше, тем самым получим противоречие.

Доказательство

1. Предположим противное. Тогда найдутся такие точка F и норма N, что $N(F) < N(E)$. Пусть $F = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$. Обозначим $F_1 = F$; $F_2 = (x_2^*, x_3^*, \dots, x_k^*, x_1^*, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$; $F_3 = (x_3^*, x_4^*, \dots, x_k^*, x_1^*, x_2^*, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$; $F_n = (x_k^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)$.

2. Из симметричности нормы имеем: $N(F_1) = N(F_2) = \dots = N(F_n)$.

3. Из свойства 3 нормы (неравенство треугольника) имеем: $N(\sum_{i=1}^n F_i) \leq \sum_{i=1}^n N(F_i)$.

4. Тогда $k \cdot N(E) = N$

$$(\sum_{i=1}^k F_i) \leq \sum_{i=1}^k N(F_i) = k \cdot N(F), N(E) \leq N(F)$$

и получаем противоречие.

Замечание 4. Утверждение 1 остаётся справедливым, если в уравнение гиперплоскости входят не первые K координат, а любой другой набор из K координат, что вытекает из симметричности рассматриваемых норм.

Утверждение 2. Пусть в точке O некоторой гиперплоскости достигается минимум расстояний от точек данной гиперплоскости до начала координат в симметрической норме N. Если взять любой луч из точки O с направляющим вектором $\vec{u}$, лежащий на этой гиперплоскости, то функция $f(t) = N(\vec{O} + t \cdot \vec{u})$ нестрого монотонно возрастает при $t > 0$.

Доказательство вытекает из неравенства треугольника и однородности нормы.

Следствие 1. Для любого многогранника вида D гиперплоскости вида (1) независимо от значений c, k, α_i минимум любой симметрической нормы достигается в точке O_k , если она принадлежит данному многограннику, или в какой-то точке на границе этого многогранника.

Замечание 5. Перед тем, как доказывать теорему об униэкстремальных гиперплоскостях, заметим, что для пустого многогранника в исследуемых гиперплоскостях свойство униэкстремальности выполнено.

Униэкстремальные гиперплоскости

Доказательство теоремы 1 проведём индукцией по размерности гиперплоскости (1).

База индукции

1. Заметим, что при $K=1$ мы получим пустой многогранник или многогранник, состоящий из одной точки, для которого утверждение тривиально.

2. В случае $K=2$ получается отрезок, для которого утверждение теоремы следует либо из утверждения 1, если точка O_2 лежит внутри отрезка, либо из утверждения 2, когда минимум будет достигаться в одном из концов отрезка.

3. Рассмотрим отдельно ещё и случай $K=3$, поскольку именно на нём будет базироваться индукционный переход нашей теоремы.

4. В случае $K=3$ многогранник представляет собой многоугольник на плоскости.

$$x_1 + x_2 + x_3 = c,$$

$$5. \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, 3$$

$$x_i = \alpha_i, i = 4, 5, \dots, n$$

Нетрудно установить вид этого многоугольника, но в доказательстве мы будем использовать лишь его выпуклость. Это существенно, поскольку в индукционном переходе может получиться выпуклый многоугольник другого вида.

6. Если точка O_3 лежит внутри него, то утверждение теоремы следует из утверждения 1. Рассмотрим случай, когда точка O_3 лежит вне многоугольника. Заметим, что точки E , в которой достигается минимум евклидовой нормы, и F , в которой достигается минимум некоторой

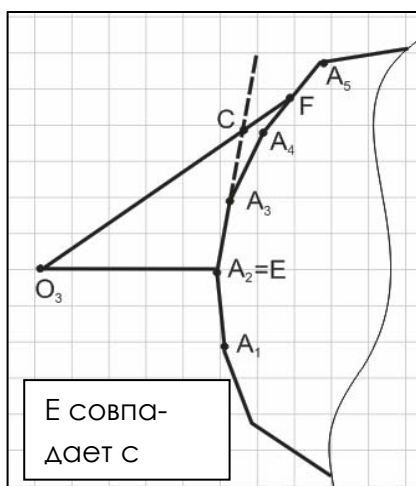
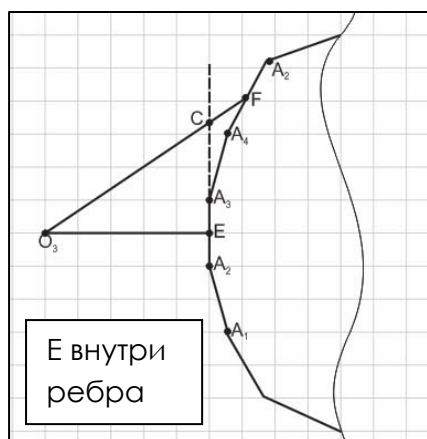
симметрической нормы N , не могут лежать внутри многоугольника по Утв 2.

7. Следовательно, точки E и F лежат на границе многоугольника. Поскольку случай $K=2$ уже разобран, мы знаем, что на каждой из сторон минимумы всех симметрических норм достигаются в одной и той же точке. Следовательно, если E и F лежат на одном ребре многоугольника, то все доказано.

8. Предположим, что точки E и F лежат на разных сторонах многоугольника и $N(F) < N(E)$. Тогда возможны два варианта: когда E внутри стороны и когда E в вершине. Для наглядности в обоих вариантах приведем соответствующие чертежи.

Первый случай – E внутри стороны: точка C получается как пересечение стороны A_2A_3 и прямой O_3F . При этом точка C лежит между O_3 и F , т.к. прямая O_3E перпендикулярна стороне многоугольника, точка O_3 лежит вне его, а многоугольник выпуклый. По утверждению 1, минимум нормы N на стороне A_2A_3 достигается в точке E . По утверждению 2, норма N растёт при движении от точки E до точки C и от точки C до точки F . Следовательно, $N(F) \geq N(E)$, получаем противоречие с пунктом 7.

9. Второй случай – E в вершине многоугольника, ближайшей к точке O_3 . Прямая O_3F пересекает одну из сторон с вершиной E или её продолжение в точке C . Снова точка C лежит между O_3 и F , т.к. многоугольник выпуклый, а точка O_3 вне его. Аналогично, $N(F) \geq N(C) \geq N(E)$ и получаем противоречие с пунктом 7.



Переход индукции

Пусть доказано, что на любых $(k-1)$ -мерных гранях минимума во всех симметричных нормах достигаются в одной и той же точке. Рассмотрим теперь грань размерности K , задаваемую уравнениями

$$\sum_{i=1}^{k+1} x_i = c,$$

$$(4) \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i, i = 1, 2, \dots, k+1. \text{ Если точка } x_i = \alpha_i, i = k+2, k+3, \dots, n$$

O_{k+1} лежит внутри многогранника гиперплоскости (4), то утверждение теоремы следует из утверждения 1. Предположим, что точка O_{k+1} лежит вне многогранника, минимум евклидовой нормы находится в точке E , минимум некоторой симметрической нормы находится в точке F , причём точки E и F лежат на разных $(k-1)$ -мерных гранях. Построим плоскость, содержащую точки O_{k+1}, E и F .

В сечении многогранника (4) этой плоскостью получится многоугольник, рёбра которого идут по граням. Действительно, из соображений размерности, пересечение плоскости и $(k-1)$ -мерной грани в K -мерной гиперплоскости будет иметь размерность 1, поскольку плоскость не может совпасть ни с одной из граней, т.к. точка O_{k+1} вне многогранника.

Далее можно повторить построение и рассуждение из двумерного случая и получить противоречие. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2.

1. Известна [4] следующая теорема: Любая гиперплоскость n -мерного пространства, обладающая свойством U ,

$$\text{имеет вид: } (4) \sum_{i=1}^n x_i = \text{const},$$

либо вид (5)

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \text{const} \quad (\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n \text{ и } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0,$$

т.е. количество коэффициентов, равных единице, равно количеству коэффициентов, равных минус единице. И каждая гиперплоскость n -мерного пространства, имеющая вид (4) либо (5), обладает свойством U .

2. Учитывая пункт 1 данного доказательства и замечание 3, для доказательства теоремы 2 необходимо только установить, что гиперплоскости вида (5) не являются униэкстремальными. Для этого построим контрпримеры. Поскольку рассматриваемые нормы симметричны, для удобства можно рассматривать гиперплоскости вида (6)

$$(6) \sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=k+1}^{2k} x_i = c,$$

а не вида (5).

3. При $c=0$ рассмотрим многогранник $\{-10 \leq x_i \leq 10, i = 1, 2, \dots, 2k-1$

$$1 \leq x_{2k} \leq 2$$

4. Поскольку рассматриваемая гиперплоскость содержит начало координат, то минимумы всех норм достигаются именно в нуле-

вой точке. Далее, воспользуемся утверждением 2 и следствием 1. В рассматриваемом случае любой луч из начала координат, который пересекает наш многогранник, сначала пересекается с его гранью $x_{2k}=1$, поскольку на таких лучах x_{2k} монотонно возрастает от 0. Значит, точка минимума для любой симметрической нормы лежит на грани $x_{2k}=1$ нашего многогранника. Но на гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=k+1}^{2k-1} x_i = 1, x_{2k} = 1 \text{ (грани } x_{2k}=1 \text{ исход-}$$

ной гиперплоскости) точка минимума для евклидовой нормы

$$\left(\frac{1}{2k-1}, \dots, \frac{1}{2k-1}, -\frac{1}{2k-1}, \dots, -\frac{1}{2k-1}, 1, 0, \dots, 0 \right),$$

которая принадлежит нашему многограннику, не является точкой минимума для симметрической нормы N^* , как было доказано автором в работе [5].

5. В случае $c > 0$ (случай $c < 0$ полностью аналогичен) минимум всех симметрических норм достигается в точке

$$\left(\frac{c}{2k}, \dots, \frac{c}{2k}, -\frac{c}{2k}, \dots, -\frac{c}{2k}, 0, \dots, 0 \right).$$

Далее, рассмотрим многогранник $-c \leq x_i \leq c, i = 1, 2, \dots, 2k-1$

$$0 \leq x_{2k} \leq 1$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим, что точка минимума для любой симметрической нормы расположена на грани $x_{2k}=0$.

Данная грань снова содержит точку минимума

$$\left(\frac{c}{2k-1}, \dots, \frac{c}{2k-1}, -\frac{c}{2k-1}, \dots, -\frac{c}{2k-1}, 0, \dots, 0 \right)$$

евклидовой нормы для гиперплоскости

$$\sum_{i=1}^k x_i - \sum_{i=k+1}^{2k-1} x_i = c, x_{2k} = 0, \text{ которая не является}$$

точкой минимума для нормы N^* , как было доказано автором в работе [5].

Доказательство теоремы 3.

1. Докажем первую часть теоремы, где утверждается, что любая униэкстремальная гиперплоскость размерности $(n-1)$ в пространстве R^n имеет вид (2). Воспользуемся теоремой 2 и учтем, что размерность гиперплоскости на

единицу меньше размерности пространства, следовательно, на координаты может быть только одно ограничение, поэтому гиперплоскость имеет вид (2), что и требовалось доказать.

2. Докажем вторую часть теоремы, где утверждается, что каждая гиперплоскость n -мерного пространства, имеющая вид (2), униэкстремальна. Для этого достаточно воспользоваться теоремой 1, положив $k=n$.

Специальная симметрическая норма

Специальной симметрической нормой N^s назовем норму, обладающую свойством: $\|(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)\| = \|(|x_{\xi_1}|, |x_{\xi_2}|, \dots, |x_{\xi_n}|)\|$ для любой перестановки ξ .

Ограничение не сильно сужает класс исследуемых задач. Например, все нормы L_p являются специальными симметрическими нормами.

Будем говорить, что свойство U^s выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой специальной симметрической нормы.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной в смысле специальной симметрической нормы, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U^s .

Замечание 6.

Поскольку класс специальных симметрических норм уже класса симметрических норм, то свойство U сильнее свойства U^s и свойство униэкстремальности в обычном смысле сильнее свойства униэкстремальности в смысле специальной симметрической нормы. Заметим также, что свойство униэкстремальности в смысле специальной симметрической нормы сильнее свойства U^s (аналогично замечанию 3).

Утверждение 3.

Пусть $\vec{O} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, t)$, $f(t) = N(\vec{O})$, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ — фиксированы, N^s — специальная симметрическая норма. Тогда минимум функции $f(t)$ достигается при t , равном 0, и функция $f(t)$ нестрого монотонно возрастает при $t > 0$.

Доказательство первой части утверждения можно получить методом от противного, используя: $N^s(x, 0) \leq \frac{1}{2} * (N^s(x, t) + N^s(x, -t)) = N^s(x, t)$.

Доказательство второй части данного утверждения аналогично доказательству утверждения 2.

Следствие 1. Пусть $\vec{O} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, $f(t) = N(\vec{O})$, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ – фиксированы, N – специальная симметрическая норма, $a_n \leq x_n \leq b_n$. Тогда минимум функции $f(t)$ достигается при t , равном минимальному по модулю числу из отрезка $[a_n, b_n]$

Доказательство теоремы 4.

1. Известна [4] следующая теорема: любая гиперплоскость, обладающая свойством U^s ,

имеет вид (3) $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = const$, где

$(\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}, i=1, 2, \dots, n)$.

2. В силу предыдущего пункта и замечания 6, униэкстремальные гиперплоскости в смысле специальной симметрической нормы следует искать среди плоскостей вида (3).

3. Докажем, что гиперплоскости вида (6)

$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = const$, где $(\alpha_i \in \{0, 1\}, i=1, 2, \dots, n)$,

Библиографический список

1. Рублев, В.С. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах [Текст]: в 407 т.; В.С. Рублев, Н.Б. Чаплыгина // ДАН – 2006. – № 2 – С. 176–178.
2. Коршунова, Н.М. Задача целочисленного сбалансирования матрицы [Текст] / Н.М. Коршунова, В.С. Рублев // Современные проблемы математики и информатики / Ярославский гос. ун-т– Вып. 3 – Ярославль, 2000. – С. 145–150.
3. Рублев, В.С. Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении [Текст] в 17 т.; В.С. Рублев, Н.Б. Чаплыгина // Дискретная математика – Вып. 4 – 2005 – С. 150–157.
4. Рублев, В.С. Об одном свойстве гиперплоскостей конечномерных пространств [Текст] / В.С. Рублев, Н.П. Федотова // Современные проблемы теории функций и их приложения : сб. науч. тр. / Саратов. гос. ун-т. – Саратов, 2010. – С.150–151.
5. Федотова, Н.П. Об одном классе гиперплоскостей конечномерных симметрических пространств [Текст] / Н.П. Федотова // Молодежь, наука, инновации 2009 : сб. науч. тр. / Ярославский гос. техн. ун-т. – Ярославль, 2009. – С.206.

являются униэкстремальными в смысле специальной симметрической нормы. Напомним, что многогранник имеет вид $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а в уравнении гиперплоскости (6) некоторые коэффициенты равны нулю, следовательно, мы имеем ограничения на свободные переменные и выполнены условия утверждения 3. Тогда свободные переменные будут равны соответствующей константе, и наше уравнение гиперплоскости примет вид (1). Гиперплоскость вида (1) униэкстремальна в общем смысле, а значит и в смысле специальных симметрических норм, что и требовалось доказать.

4. Для завершения доказательства теоремы 4 осталось заметить, что уравнение вида (3) можно преобразовать к уравнению вида (6) заменой соответствующих координат x_i на $-x_i$. Такая замена допустима, поскольку $N^s(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = N^s(x_1, x_2, \dots, -x_i, \dots, x_n)$ по определению.