УДК 514.112

Н.Б. Яновская

Графическое решение уравнений и неравенств с параметром

В статье рассматривается геометрическая интерпретация систем уравнений, связанных с изучением темы «Уравнения и неравенства с параметром». Приводятся примеры с решениями из ЕГЭ -2010 года.

Ключевые слова: геометрическая интерпретация, уравнения и неравенства с параметром, ЕГЭ, модуль числа

N.B. Yanovskaya

The Graphic Decision of Equations and Inequalities with a Parameter

In the article geometrical interpretation of systems of the equations connected with studying the theme «Equations and Inequalities with a Parameter» is considered. Examples with decisions from the Unified State Examination-2010 are resulted.

Keywords: geometrical interpretation, equations and inequalities with a parameter, the Unified State Examination, the number module.

Как утверждают эксперты (составители материалов к ЕГЭ), успешное решение задач группы С1–С6 необходимо для поступления в вузы страны и их оценка не влияет на получение школьных аттестатов. Однако решение задач этой группы всегда вызывает интерес как у учителей, так и у выпускников школы. Среди самих задач данной группы существует градация: задачи группы С1–С6 подбирают таким образом, что успешное решение задач С1–С4 характеризует повышенный уровень знаний, решение задач С5–С6 – высокий, причем задача С6 входит в состав олимпиадных задач по курсу средней школы. В задачах ЕГЭ–2010 особенно интересно, по нашему мнению, решение задачи С5, так как, с одной стороны, оно основано на знании темы «Уравнения и неравенства с параметром», а с другой стороны – на геометрической интерпретации модуля.

Изучению темы «Уравнения и неравенства с параметром» в школьной программе не уделено достаточного внимания, и обычно ее рассматривают на факультативных занятиях [1]. Решение уравнений и неравенств с параметрами возможно аналитическим и графическим способами, причем существуют определенного вида уравнения и неравенства, сравнительно легко решаемые аналитическим способом, и это решение может быть простым и коротким. Однако в этом случае необходима догадка, которая не приходит без большого опыта решения аналогичных задач. Научить выпускников (учащихся 11 класса) догадке в решении – не совсем простая задача. Нам представляется, что гораздо проще научить «лобовому», как называет автор статьи [2], решению, основанному на геометрической интерпретации получающейся при решении системы уравнений.

Рассмотрим графическое решение задачи, решаемой аналитическим методом (замены переменной) в качестве демонстрационного упражнения на факультативных занятиях по теме «Уравнения с параметром вида $af^2(x)+bf(x)+c=0$», где $a\neq0$ и $f(x)$ – монотонная функция на всей области определения. [1]

Задача 3. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{3x-2}=x+a$ имеет одно решение?

Решение. Переходим к системе уравнений

$$\begin{cases} y=\sqrt{3x-2}, \\ y=x+a\geq 0. \end{cases}$$

Первое уравнение определяет верхнюю ветвь параболы с вершиной на оси абсцисс в точке $x=\frac{2}{3}$. Второе определяет прямую с угловым коэффициентом k=1, то есть угол наклона к оси абсцисс равен 45º, а отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен a (рис1). Если данная прямая – касательная к параболе, то парабола и прямая имеют одну общую точку – точку касания. Дифференцируя уравнение параболы и приравнивания произвольную единице, получим абсциссу точки касания:

$$y=\sqrt{3x-2}\ ,\quad y'=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\quad ,\quad \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}=1\quad ,\quad x=\frac{17}{12}.$$

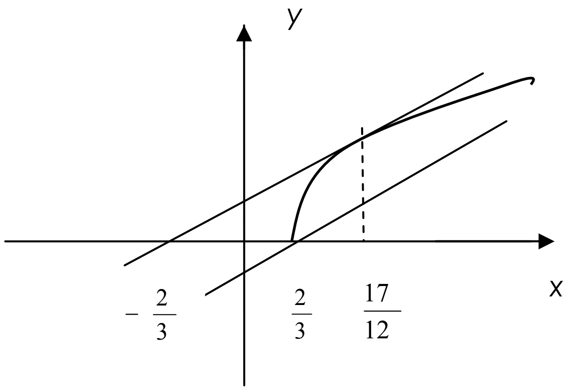

Рис. 1

Определим значение параметра *a*, соответствующее значению

$$x=\frac{17}{12}:\ \sqrt{3\cdot\frac{17}{12}-2}=x+a,\ a=\frac{1}{12}.$$

Две точки пересечения параболы и прямой можно получить, если прямая проходит через вершину параболы параллельно касательной, то есть пересекает ось ординат в точке $y=-\frac{2}{3}$, а значение параметра в этом случае $a=-\frac{2}{3}$. Если прямую перемещать параллельно самой себе вниз, то есть значение параметра $a<-\frac{2}{3}$, то прямая пересечет параболу опять в одной точке и абсциссу этой точки (корень уравнения) можно определить, решая данное иррациональное уравнение:

$$\sqrt{3x-2}=x+a,\qquad 3x-2=(x+2)^2,\qquad x^2+(2a-3)x+(a^2+2)=0,$$

$$x=\frac{(3-2a)\pm\sqrt{1-12a}}{2}\quad \text{и так как}\quad x>\frac{2}{3},\quad \text{то}\quad x=\frac{(3-2a)+\sqrt{1-12a}}{2}.$$

Ответ: при $a=\frac{1}{12}$ корень уравнения $x=\frac{17}{12}$;

при $a<-\frac{2}{3}$ корень уравнения $x=\frac{(3-2a)+\sqrt{1-12a}}{2}$.

По нашему мнению, рассмотренное графическое решение действительно, как отмечено в работе [3], не является абстрактным и потому его необходимо рассматривать наравне с аналитическим, то есть необходимо рассматривать решение одного и того же упражнения двумя способами – аналитическим и графическим. В данной статье предлагаем графическое решение некоторых задач С5 демонстрационного варианта ЕГЭ-2010 [4].

Использование понятия модуля не как расстояния между точками числовой прямой, а как некий геометрический образ – излом (преломление) [3] также помогает сравнительно легко решать уравнения и неравенства с параметром.

С5 (вариант 6). Найдите все такие *a*, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|$ меньше 4.

Решение. Функция представляет сумму двух положительных слагаемых. Следовательно, наименьшее значение функции равно нулю, то есть каждое слагаемое равно нулю одновременно:

$y=4|x-a|$ и $y=|y^2+2x-3|$.

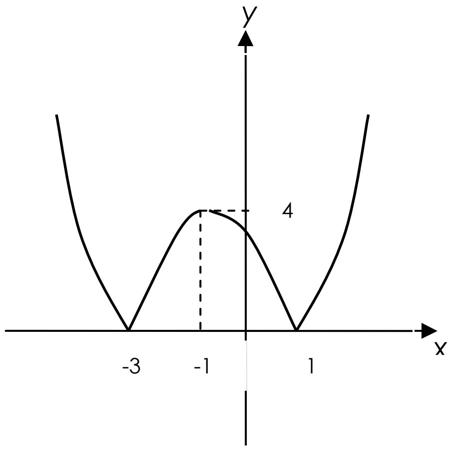

Рис. 2

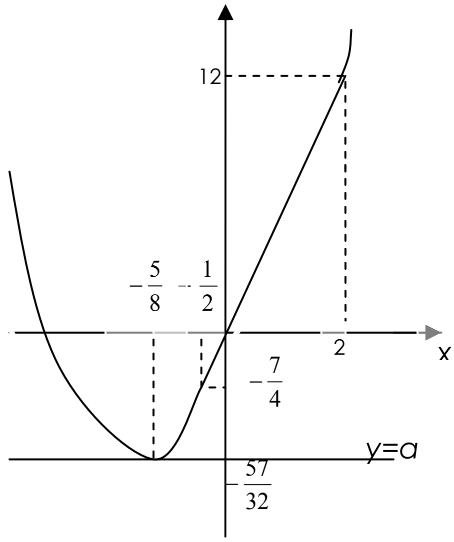

Рис. 3

График второй функции $y=|(x+3)(x-1)|$ – квадратная парабола после излома в точках $x=-3$ и $x=1$ (рис.2) и с ординатой вершины $y(-1)=4$. Наименьшее значение функции равно нулю как раз в точках излома. Значение функции $f(x)$ в точках излома $f(-3)=4|-3-a|$ и $f(1)=4|1-a|$, и это значение по условию должно быть меньше 4, то есть $4|-3-a|<4$ и $|4-a|<4$.

Решение первого неравенства

$|3+a|<1 \Rightarrow -1<3+a<1 \Rightarrow -4<a<-2$

и второго неравенства

$|1-a|<1 \Rightarrow -1<1-a<1 \Rightarrow 0<a<2$.

Ответ: $-4<a<-2$, $0<a<2$.

С5 (вариант 2). Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2+4x+|x^2-\frac{3}{2}x-1|-a$ принимает только неотрицательные значения.

Решение. Решим неравенство:

$x^2+4x+|x^2-\frac{3}{2}x-1|-a\ge 0$ или

$x^2+4x+|(x-2)(x+\frac{1}{2})|\ge a$, то есть определим значение параметра a, при котором график функции $y=x^2+4x+|(x-2)(x+\frac{1}{2})|$ расположен выше прямой $y=a$.

При $(x-2)(x+\frac{1}{2})\ge 0$ имеем $y=2x^2+\frac{5}{2}x-1$, при $(x-2)(x+\frac{1}{2})<0$ имеем $y=\frac{11}{2}x+1$, то есть в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=2$ происходит излом функции (рис.3).

Определим вершину параболы: $y'=4x+\frac{5}{2}$, $4x+\frac{5}{2}=0$, $x=-\frac{5}{8}$, $y\left(-\frac{5}{8}\right)=-\frac{57}{32}$.

На интервале $(-\frac{1}{2}; 2)$ графиком функции является прямая уравнения $y=\frac{11}{2}x+1$. Из рис.3 видно, что график параболы всегда будет расположен выше прямой $y=a$ при значении $a\le -\frac{57}{32}$.

Ответ: $a \leq -\frac{57}{32}$

С5 (вариант 3). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение:

$$\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k, k \in Z \Leftrightarrow a^2 = x^2 + (2\pi k)^2, k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a^2, \\ y = x^2 + (2\pi \kappa)^2, \quad k \in Z. \end{cases}$$

Прямая $y=a^2$ расположена выше оси Ox. Параболы уравнения $y = x^2 + (2\pi k)^2$ имеют вершины на оси Oy: при $n=0$ вершина параболы в начале координат, и она пересекает прямую $y=a^2$ в двух точках; при $n=1$ парабола $y = x^2 + (2\pi)^2$ пересекает прямую $y=a^2$ тоже в двух точках. Следовательно, для получения восьми точек пересечения прямой и параболы необходимо иметь четыре параболы, то есть необходимо взять $n=2$ и $n=3$ (но не больше!). Последняя необходимая парабола имеет вершину в точке $y=(2\pi\cdot 3)^2$, то есть значение параметра a^2 заключено в интервале $(2\pi\cdot 3)^2<a^2<(2\pi\cdot 4)^2$,

откуда $2\pi\cdot 3<|a|<2\pi\cdot 4$ или

$6\pi< a<8\pi$ и $-8\pi< a<-6\pi$.

Ответ: $(-8\pi; -6\pi) \cup (8\pi; 6\pi)$.

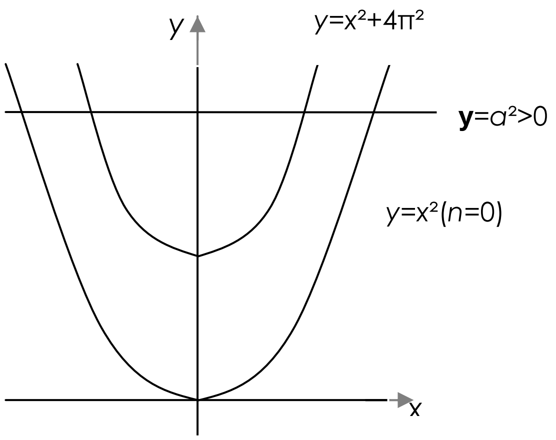

Рис. 4

С5 (вариант 7). Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sin\sqrt{a^2 - x^2} = 0$ имеет ровно восемь решений.

Аналитическая запись решения следует из графического метода:

$$\sin\sqrt{a^2 - x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \pi k, k \in Z \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = x^2 + (\pi k)^2, \ k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a^2, \\ y = x^2 + (\pi k)^2, \ k \in Z \end{cases} \Rightarrow 9\pi^2 < a^2 < 16\pi^2 \Rightarrow 3\pi < |a| < 4\pi \quad \Rightarrow \ (-4\pi;-3\pi) \cup (3\pi;4\pi).$$

Графическое решение позволяет гораздо быстрее и изящнее получить решение задачи С5 варианта 8. Покажем это решение.

С5 (вариант 8). Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y + 2x \geq 2a$ и $y - x \leq 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a + 3$.

Решение. Для графической иллюстрации примем значение параметра $a>0$. Определяем общее решение неравенств $\mathrm{y} + 2\mathrm{x} \geq 2a$ и $y - x \leq 2a$. Точка пересечения прямых А$(-\frac{a}{3}; \frac{5}{3}a)$ (рис.5). При $a>0$ строим прямую уравнения $2y-x=a+3$ (рис.6). Решением неравенства $2y-x>a+3$ является полуплоскость, расположенная выше или ниже прямой $2y-x=a+3$.

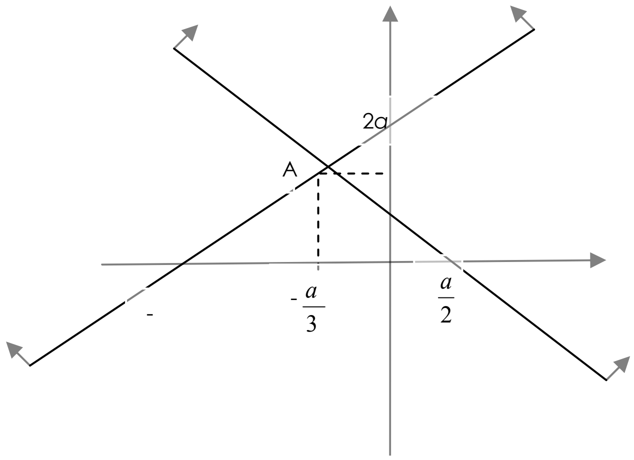

Рис. 5

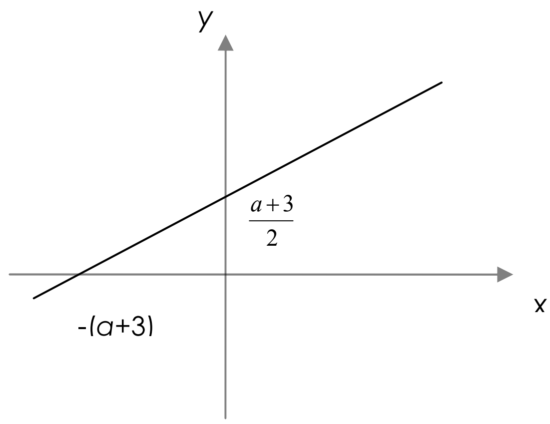

Рис.6

Для решения заданной задачи необходимо, чтобы решением неравенства являлась полуплоскость, расположенная выше прямой и проходящая через точку А. Из этого условия определяем значение параметра:

$2y$-x=a+3; $$2\cdot\frac{5}{3}a-(-\frac{a}{3})=a+3; \qquad a=\frac{9}{8}>0.$$

$$\begin{cases} y+2x\geq\frac{9}{8}, \\ y\text{-}x\leq\frac{9}{4} \end{cases}$$

При таком значении параметра a решим первую часть задачи: решение системы неравенств должно полностью принадлежать решению неравенства $2y$-x>a+3.

Для этого необходимо,

чтобы прямая $2y$-x=a+3 проходила через точку А, то есть $a=\frac{9}{8}$ (рис.7). Решение системы неравенств будет принадлежать неравенству $2y$-x> $\frac{33}{8}$, если прямую $2y$-x= $\frac{33}{8}$ перемещать параллельно себя вверх, то есть значение параметра $a<\frac{9}{8}$.

Ответ: $a<\frac{9}{8}$.

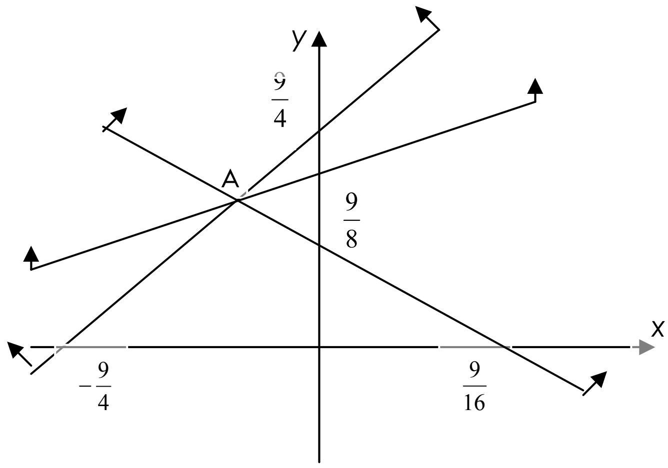

Рис. 7

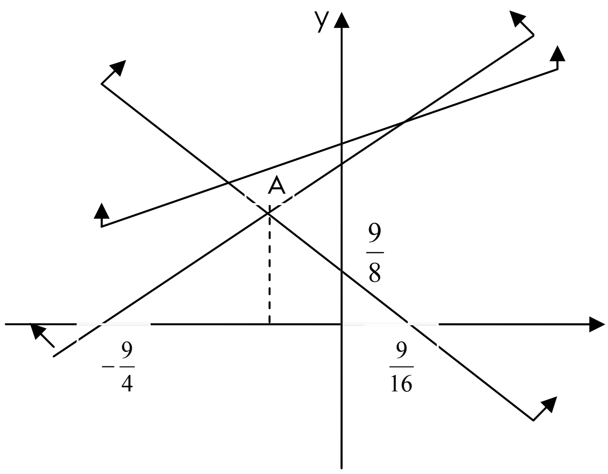

Рис. 8

С5 (вариант 9). Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$ имеет ровно три нуля функции.

Решение. Графиком функции является прямая, имеющая «изломы» в точках

x=0 и $2|x|-a^2=0,\ |x|=\dfrac{a^2}{2},\ x=\pm\dfrac{a^2}{2}$.

Значение функции в точках «излома»

$f(0)=2a^2+a=a(2a+1)$, $\quad f(-\dfrac{a^2}{2})=a+\dfrac{a^2}{2}=a(1+\dfrac{a}{2})$, $\qquad f(\dfrac{a^2}{2})=a-\dfrac{a^2}{2}=a(1-\dfrac{a}{2})$.

Сравним значения функции в точках «излома»

$$f(0)-f(-\frac{a^2}{2})=(2a^2+a)-(a+\frac{a^2}{2})=\frac{3}{2}a^2>0,$$

$$f(-\frac{a^2}{2})-f(\frac{a^2}{2})=(a+\frac{a^2}{2})-(a-\frac{a^2}{2})=a^2>0,$$

$$f(0)-f(\frac{a^2}{2})=(2a^2+a)-(a-\frac{a^2}{2})=\frac{5}{2}a^2>0.$$

Следовательно, $f(0)>f(-\dfrac{a^2}{2})>f(\dfrac{a^2}{2})$ и три нуля функции возможны в двух случаях (рис. 9 и рис.10).

Случай I. $\qquad f(-\dfrac{a^2}{2})=0\Rightarrow a(1+\dfrac{a}{2})=0\Rightarrow a=0,\ a=-2.$

При a=0 имеем $f(x)=4|x|-x$ – график функции имеет только один «излом», то есть при a=0 три нуля функции получить невозможно.

При a=-2 имеем $f(x)=2\,|2|x|-4|-x-2$.

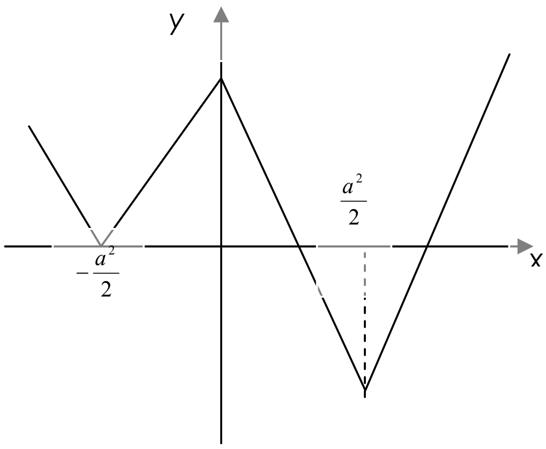

Рис. 9

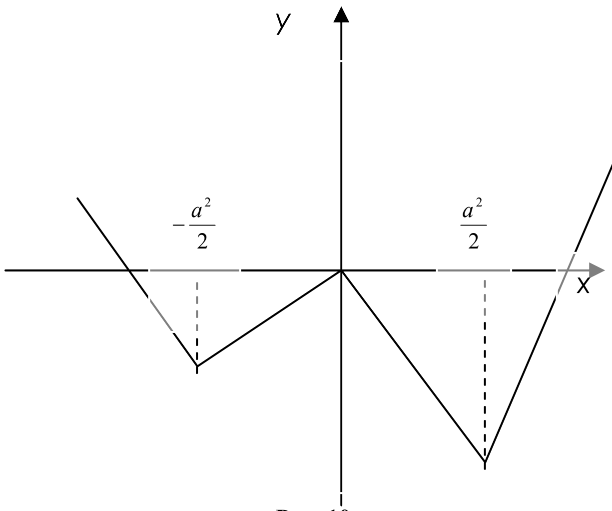

Рис. 10

Проверим, имеет ли функция три нуля или не имеет.

$2\,|2|\,x\,|-4| = x+2 \Rightarrow \quad 2\,(2\,|x|-4) = \pm\,(x+2) \Rightarrow\; 4\,|x| = 8 \pm (x+2) \Rightarrow \quad 4\,|x| = x+10$ и $4\,|x| = 6-x \Rightarrow \quad 4x = \pm\,(x+10)$ и $4x = \pm\,(6-x)$.

Из первого равенства получим $x=\dfrac{10}{3}$, x=-2 и из второго получим $x=\dfrac{6}{5}$, x=-2.

Следовательно, функция имеет нули в точках x=-2, $x=\dfrac{6}{5}$ и $x=\dfrac{10}{3}$.

Случай II. $f(0)=0 \Rightarrow a(2a+1)=0 \Rightarrow a=0$ и $a=-\dfrac{1}{2}$.

Значение a=0 рассматривать не нужно, так как в этом случае функция имеет один «излом». Рассмотрим $a=-\dfrac{1}{2}$ и получим функцию $f(x)=2\left|2\;|x|-\dfrac{1}{4}\right|-x-\dfrac{1}{2}$. Проверим, имеет ли функция три нуля.

$$2\left|\;2\;|x|-\frac{1}{4}\;\right|=x+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\left|\;2\;|x|-\frac{1}{4}\;\right|=\pm(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow 4\,|\,x\,|-\frac{1}{2}=\pm(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow 4\,|\,x\,|=\frac{1}{2}\pm(x+\frac{1}{2}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow\; 4\,|x|=x+1$ и $4\,|x|=-x \Rightarrow\; 4x=\pm(x+1)$ и $x=0 \Rightarrow\; x=\dfrac{1}{3}$, $x=-\dfrac{1}{5}$ и x=0.

Следовательно, получим три нуля функции и ответ задачи a=-2 и $a=-\dfrac{1}{2}$.

Приведенное решение действительно, по нашему мнению, подтверждает, что, как утверждают авторы статьи [3], геометрические интерпретации удобны и доступны для понимания подавляющего большинства учащихся, так как алгебраическая задача в этом случае перестает быть абстрактной и отвлеченной, а решения в процессе поиска становятся частью опыта обучаемых. При этом формируется геометрическое мышление, то есть развивается умение оперировать различными геометрическими объектами, интерпретировать алгебраические задачи геометрически, что позволяет решать задачи, которые алгебраическими методами решить затруднительно, а иногда и невозможно.

Библиографический список

1. Постникова, С.Я. Уравнения с параметрами на факультативных занятиях [Текст] // Математика в школе.–2002.–№8, С.73–77.
2. Нестеренко, Ю.В. Некоторые замечания в связи с демонстрационной версией задания для ЕГЭ в 2010 году [Текст] // Математика в школе.–2009.–№10, С.68–78.
3. Далингер, В.А. Геометрическая интерпретация модуля в задачах [Текст]/ В.А. Далингер, М.Д. Боярский // Математика в школе.–2002.–№8,С.61–63.
4. Высоцкий, И.Р. Самое полное издание типовых вариантов решенных заданий ЕГЭ:2010: Математика [Текст]/ И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; Федеральный институт педагогических измерений. – М.,2010.– 96 с.