УДК 519.1

Х.Д. Нурлигареев

Избранные главы дискретной геометрии в курсе математики специализированных школ

Данная статья посвящена вопросам дискретной геометрии, которые традиционно излагаются в курсе математики школы имени А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ. Рассматривается понятие решётки и основные её свойства, исследуется вопрос о правильных многоугольниках, вершины которых имеют целочисленные координаты, разбирается формула Пика. Теоретическую часть сопровождают задачи, предлагаемые школьникам на практических занятиях.

Ключевые слова: решётка, правильный многоугольник, формула Пика, примитивный треугольник.

Kh.D. Nurligareev

The Selected Chapters of Discrete Geometry in the course of Mathematics of Specialized Schools

The given article is devoted to the questions of discrete Geometry which are traditionally represented in the course of Mathematics in the school named after A.N. Kolmogorov Specialized educational-scientific center of Moscow State University. Is regarded the concept of the lattice and its basic properties, is investigated the question on the regular polygons which tops have integer coordinates, Pick's theorem is under consideration. The theoretical part is accompanied by the problems offered to schoolboys at practical classes.

Key words: lattice, regular polygon, Pick's theorem, primitive triangle.

Клетчатая бумага, под которой здесь и далее мы будем подразумевать множество всех точек плоскости с целыми координатами, является своеобразным мостом с интенсивным двусторонним движением, который даёт возможность при решении чисто геометрических задач воспользоваться методами алгебры, теории чисел и математического анализа, и наоборот, задачи аналитического характера позволяет переводить на геометрический язык. Это замечательное наблюдение во многом объясняет несомненную актуальность вопросов, рассматриваемых в данной статье. Своими корнями они восходят ко временам Диофанта и связаны с такими значительными именами, как Гаусс и Эйлер, но с методической точки зрения нас будут более других интересовать результаты, которых математикам удалось добиться лишь в 20-м веке.

В школе имени А.Н. Колмогорова Специализированного Учебно-Научного Центра МГУ имени М.В. Ломоносова тематика, связанная с задачами арифметики, алгебры и геометрии на клетчатой бумаге, была апробирована довольно давно и с тех пор успешно преподается в старших классах в рамках курса геометрии. Та часть программы, которая является обязательной для изучения, включает в себя понятие решётки и основные её свойства, изучение вопроса о правильных многоугольниках, координаты вершин которых являются целочисленными, а также формулу Пика для площади многоугольника на целочисленной решётке.

Здесь мы остановимся на базовых моментах развиваемой теории, а также приведём формулировки и основные идеи доказательства центральных теорем курса, знание которых развивает интерес к изучению математики и повышает уровень математической культуры учащихся.

Рассмотрим на плоскости два семейства параллельных прямых, разбивающих плоскость на равные параллелограммы (рис. 6). Множество Λ всех точек пересечения этих прямых (или, что то же самое, множество вершин всех параллелограммов) называется *точечной решёткой* или просто *решёткой*, а сами точки — *узлами решётки*. Каждый параллелограмм называется *фундаментальным параллелограммом*; также говорят, что такой параллелограмм порождает решётку. Обычно предполагается, что начало координат является одним из узлов решётки.

Любую решётку можно задать другим способом. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — ненулевые и неколлинеарные векторы, O — начало координат. Тогда множество $\Lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$ всех таких точек P, что $\overrightarrow{OP} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ для некоторых целых чисел m и n, является решёткой. Так, например, для стандартной клетчатой бумаги мы имеем $\mathbb{Z}^2 = \Lambda(\mathbf{i},\mathbf{j})$, где $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$.

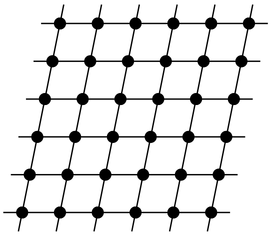

Рис. 6

Точно так же, начиная с трёх некомпланарных векторов, нетрудно определить точечные решётки в пространстве. Аналогично могут быть определены решётки и в пространствах больших размерностей.

Важно понимать, что решётка состоит из точек (узлов), а другие объекты, такие как прямые и векторы, напрямую к ней не относятся. Одна и та же решётка может быть получена при помощи различных семейств прямых или различных пар векторов.

Отметим ряд простейших свойств произвольных точечных решёток.

1. Прямая, проходящая через два узла решётки, проходит через бесконечно много узлов решётки. При этом все расстояния между соседними узлами решётки, лежащими на этой прямой, равны.

2. Преобразование параллельного переноса плоскости (пространства), переводящее один узел решётки в другой её узел, переводит решётку саму в себя.

3. Решётка центрально симметрична относительно середины любого отрезка, концы которого лежат в узлах этой решётки.

4. (*Правило параллелограмма*) Если три вершины параллелограмма являются узлами решётки, то и четвёртая его вершина — тоже узел решётки.

5. Параллелограмм с вершинами в узлах решётки является фундаментальным тогда и только тогда, когда он не содержит других узлов решётки на сторонах и внутри себя, кроме своих вершин.

Теперь передём к теоремам.

Теорема 1. *Плоский правильный n-угольник при $n = 5$ и $n > 6$ нельзя расположить ни на одной решётке на плоскости и в пространстве.*

Одно из доказательств приведённой теоремы использует метод крайнего. Рассуждая от противного, мы предполагаем, что для данного n, где $n = 5$ или $n > 6$, на некоторой решётке можно расположить правильный n-угольник. Среди всех n-угольников, которые лежат на этой решётке, выберем тот, длина стороны которого является наименьшей. После чего,

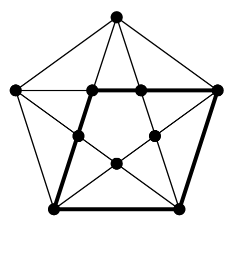

Рис. 7

пользуясь правилом параллелограмма, на основе имеющегося изготовим n-угольник, длина стороны которого меньше, чем у исходного.

Полученное таким образом противоречие доказывает требуемое утверждение. Соответствующие иллюстрации приведены на рис. 7 и рис. 8.

Стоит отметить, что эта теорема может быть легко доказана при помощи комплексных чисел. То же самое замечание относится и к части результатов, которые будут изложены ниже. Поразительно, но порой даже самые азы теории функций комплексного переменного позволяют, взглянув на проблему с другого ракурса, существенно упростить решение. Что уж и говорить о её использовании во всей полноте.

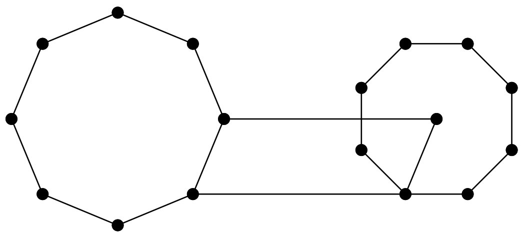

Рис. 8

К вопросу о правильных фигурах мы возвращаемся в курсе стереометрии, где показывается, что все вершины куба, тетраэдра и октаэдра могут иметь целочисленные координаты в трехмерном пространстве, а все вершины икосаэдра и додекаэдра — нет.

Из теоремы 1 путём нехитрых рассуждений можно вывести следующий результат.

Теорема 2. *При любом натуральном* $q > 3$ *число* $\cos\frac{\pi}{q}$ *иррационально. При любом натуральном* $q \geqslant 3$ *и* $q \neq 6$ *число* $\sin\frac{\pi}{q}$ *иррационально.*

Теорема 3. *(Г. Пик, см. [1]) Для площади* $[P]$ *простого многоугольника* P *на целочисленной решетке* $\mathbb{Z}^2$ *справедлива формула*

$$[P] = N_i + \frac{1}{2}N_e - 1,$$

где N_i *— число узлов решётки, расположенных строго внутри многоугольника, а* N_e *— число узлов решётки, расположенных на его границе (включая все его вершины).*

Примечательно, что последняя теорема, как, впрочем, и предыдущие, имеет несколько различных доказательств. Самостоятельный вывод одного из них по некотором размышлении доступен каждому школьнику. Именно, сначала требуется доказать формулу Пика в ряде частных случаев: для прямоугольных треугольников, катеты которых лежат на линиях клетчатой бумаги, для треугольников, хотя бы одна из сторон которых лежит на какой-либо линии клетчатой бумаги, и наконец, для произвольных треугольников. После этого достаточно рассмотреть триангуляцию исходного многоугольника (то есть его разбиение на треугольники) и воспользоваться тем фактом, что если один многоугольник составлен из двух других, для которых формула Пика выполняется, то она справедлива и для искомого многоугольника.

Другое доказательство основано на так называемом инварианте Эйлера. Как и в предыдущем случае, мы рассматриваем триангуляцию исходного многоугольника. Однако теперь на неё накладывается дополнительное условие: каждый треугольник разбиения должен быть примитивным, то есть не содержащим ни внутри себя, ни на границе узлов решётки $\mathbb{Z}^2$, отличных от своих вершин. Оказывается, с таким требованием число треугольников N в разбиении не зависит от способа разбиения. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить сумму углов всех рассматриваемых примитивных треугольников. С одной стороны, она равна πN, а с другой

$$2\pi N_i + \pi(N_e - n) + \pi(n-2) = \pi(2N_i + N_e - 2),$$

где n — количество вершин данного многоугольника. Отсюда мы видим, что

$$N = 2N_i + N_e - 2, \tag{12}$$

то есть число N не зависит ни от количества вершин исходного многоугольника, ни от способа его разбиения на примитивные треугольники.

Для завершения доказательства осталось удостовериться в том, что площадь каждого примитивного треугольника равна $\frac{1}{2}$. Один из возможных способов сделать это заключается в следующем. Впишем примитивный треугольник в прямоугольник, стороны которого параллельны линиям клетчатой бумаги (рис. 9). Тогда, с одной стороны, его площадь как разность площадей прямоугольника и прямоугольных треугольников, катеты которых лежат на линиях клетчатой бумаги, есть число полуцелое. То есть площадь любого примитивного треугольника не меньше $\frac{1}{2}$. С другой стороны, в любом разбиении прямоугольника на примитивные треугольники количество треугольников разбиения в соответствии с формулой (12) равно

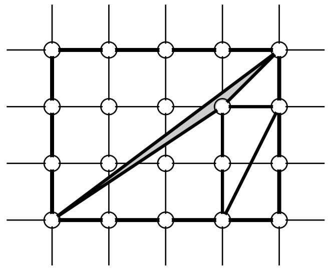

Рис. 9

$$2(a-1)(b-1) + 2(a+b) - 2 = 2ab.$$

Поэтому, оценивая площадь описанного прямоугольника, получаем

$$ab \geqslant 2ab = ab.$$

Следовательно, площадь каждого примитивного треугольника равна $\frac{1}{2}$.

Другое возможное доказательство этого замечательного факта опирается на математическую индукцию по полупериметру $(a+b)$ прямоугольника и использует следующее утверждение: если прямые AB и CD параллельны, то треугольники ACD и BCD равновелики. Тесно связана с этим доказательством задача, подробно разбираемая в статье [4].

Задача 1. Три кузнечика (три точки) в начальный момент времени сидят в трёх вершинах одной клетки, а затем начинают "играть в чехарду": каждый может прыгнуть через одного из двух других, после чего оказывается в симметричной относительно него точке. В каких тройках точек могут через несколько прыжков оказаться кузнечики?

Решение этой задачи, вкупе с полученными выше результатами, даёт любопытную характеристику примитивных треугольников. Назовём треугольник *достижимым*, если в его вершинах могут одновременно оказаться три кузнечика из задачи 1. При этом достижимые треугольники мы будем рассматривать с точностью до параллельного переноса. Тогда оказывается справедливой нижеследующая теорема.

Теорема 4. *Следующие три свойства треугольников, вершины которых принадлежат решётке $\mathbb{Z}^2$, эквивалентны друг другу:*

1) треугольник имеет площадь $\frac{1}{2}$; 2) треугольник является примитивным; 3) треугольник достижим.

Важно отметить, что существование триангуляции произвольного простого многоугольника, играющее ключевую роль в обоих приведённых доказательствах формулы Пика, — факт, являющийся сам по себе по меньшей мере неочевидным. Стандартное его доказательство основано на том, что в любом простом многоугольнике можно провести внутреннюю диагональ. Для начала заметим, что в каждом многоугольнике найдётся угол меньше развёрнутого. В самом деле, рассмотрим прямую l, которая не пересекается с данным многоугольником. Среди всех его вершин выберем наименее удалённую от l. Угол при этой вершине и будет меньше π.

Теперь рассмотрим три последовательные вершины многоугольника B, A и C такие, что $\angle BAC < \pi$. Заметим, что внутренней диагональю является либо отрезок BC, либо AD, где D — наиболее удалённая от прямой BC вершина многоугольника, лежащая внутри треугольника ABC. Для завершения доказательства существования триангуляции осталось воспользоваться математической индукцией.

Приведём также примеры задач на эту тему, предлагаемых школьникам на занятиях в классе.

Задача 2. Бильярдный стол имеет форму правильного треугольника. Докажите, что если шар после удара прошел через некоторую точку семь раз, то он пройдет через нее еще хотя бы один раз.

Задача 3. Докажите, что если числа p и q взаимно просты и $\cos\frac{p\pi}{q}$ является рациональным числом, то число $\cos\frac{\pi}{q}$ также рационально.

Задача 4. Вершины треугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, и на его сторонах нет других узлов решётки. Докажите, что если такой треугольник содержит внутри себя ровно один узел решётки, то этот узел является точкой пересечения медиан данного треугольника.

Задача 5. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав в каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на начальную позицию. Ломаная, соединяющая последовательно центры клеток, через которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

Задача 6. Середины сторон квадрата соединены отрезками со всеми вершинами квадрата; таким образом, квадрат оказывается разделённым восемью отрезками на двадцать треугольников и один восьмиугольник. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника.

Задача 6 является наиболее показательной в методическом плане. Будучи сформулированной в совершенно независимых от понятия решётки терминах, она, тем не менее, может быть решена при помощи формулы Пика. Для того, чтобы ясно себе это представить, достаточно разбить исходный квадрат на 144 одинаковых квадратика и заметить, что все точки пересечения рассматриваемых в условии отрезков будут лежать в вершинах этих квадратиков (рис. 10). Та же формула Пика выдает решение задачи 5 в одну строчку: неожиданным образом выясняется, что площадь исследуемой фигуры не зависит от траектории движения короля и равна 31.

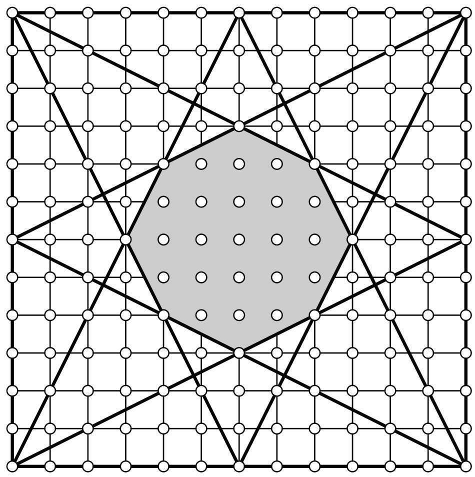

Рис. 10

Помимо обязательного обучения базовым знаниям постановка всей системы математического образования в школе имени А.Н. Колмогорова предполагает широкую сеть специальных курсов, семинаров и кружков, в работе которых учащиеся участвуют на добровольной основе. Программа подобных факультативов практически всегда содержит дополнительные главы к тем курсам, которые включены в учебный план школы. Так, программа специального курса "Задачи на клетчатой бумаге" включает в себя такие разделы, как окружности на решётках, диофантовы приближения, дискретные гармонические функции и многие другие. Стоит отметить, что часть задач, предлагаемых школьникам для собственных исследований, существенно выходит за рамки обычного школьного курса и представляет самостоятельный научный интерес.

Библиографический список

1. Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre. *Sitzungber. Lotos (Prague)*. — 19: 311-319, 1899.
2. Вавилов, В.В., Устинов, А.В. *Задачи на клетчатой бумаге* [Текст]. — М.: Школа имени А.Н. Колмогорова, 2006.
3. Вавилов, В.В., Устинов, А.В. *Многоугольники на решётках* [Текст]. — М.: МЦНМО, 2006.
4. Васильев, Н.Б. *Вокруг формулы Пика* [Текст] // Квант — 1974 — N12. — С. 39-43.