УДК 517.9

Ю.В. Бондаренко, Е.И. Смирнов

Сильное условие Шоке для конуса вогнутых функций

В статье исследуется сильное условие Шоке для конусов вогнутых функций в банаховых пространствах. Доказаны теоремы в весовых пространствах Лебега.

Ключевые слова: весовые пространства Лебега, вогнутые функции, сильное условие Шоке.

Ju.V.Bondarenko, E.I.Smirnov

Strong Condition of Shoke for the Cone of Concave Functions

In the article the strong condition Shoke for cones of concave functions in banach spaces is investigated. Theorems in weight spaces of Lebega are proved.

Keywords: weight spaces of Lebega, concave functions, a strong condition of Shoke.

Рассмотрим конус вогнутых функций K_{conc}. Покажем, что этот конус удовлетворяет сильному условию Шоке с весом. Предположим сначала, что для функции $\varphi \in K_{conc}$ выполняются условия

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}\varphi(t) = \infty; \quad \lim_{t\to\infty} t^{-1}\varphi(t) = 0. \tag{1}$$

Для каждой функции $\varphi \in K_{conc}$, удовлетворяющей (1), определим заполняющую последовательность, которая строится так. Зафиксируем число $a > 1$. Поскольку эта последовательность является двусторонней, определим ее конструкцию отдельно для индексов, являющихся отрицательными целыми числами и натуральными числами.

Зафиксируем некоторую точку $t_0 > 0$. Начнем с индексов, являющихся отрицательными целыми числами. Положим $t_0 = 1$, и пусть точки $t_{-1}, ..., t_{-n}$ определены. Определим теперь точку t_{-n-1} равенством

$$t_{-n-1} = \sup\{t : \frac{\varphi(t)}{t} \geq a\frac{\varphi(t_{-n})}{t_{-n}} \bigwedge \quad \varphi(t) \leq a^{-1}\varphi(t_{-n})\}. \tag{2}$$

Перейдем теперь к индексам, являющимся натуральными числами.

Пусть точки $t_1, ..., t_n$ определены. Определим теперь точку t_{n+1} равенством

$$t_{n+1} = \inf\{t : \frac{\varphi(t)}{t} \leq a^{-1}\frac{\varphi(t_n)}{t_n} \bigwedge \varphi(t) \geq a\varphi(t_n)\}. \tag{3}$$

Прямо из (2 -3) следует, что для каждого $k \in N$ выполняются неравенства

$$\varphi(t_k) \leq \frac{1}{a}\varphi(t_{k+1});$$

$$\frac{\varphi(t_{k+1})}{t_{k+1}} \leq \frac{1}{a}\frac{\varphi(t_k)}{t_k};$$

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} \geq a; \tag{4}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{k} \varphi(t_j) \leq \varphi(t_k)\frac{a}{a-1};$$

$$\sum_{j=k}^{\infty} \frac{\varphi(t_j)}{t_j} \leq \frac{a}{a-1}\frac{\varphi(t_k)}{t_k}.$$

Непосредственно из (4) следует основное свойство заполняющих последовательностей.

Лемма 1. *Положим*

$$\overline{\varphi}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(t_j)\min\{\frac{t}{t_j}, 1\}.$$

Тогда для $t \in [t_n, t_{n+1})$ *справедливы соотношения*

$$t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} + \varphi(t_n) \leq \overline{\varphi}(t) \leq \frac{a}{a-1}(t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} + \varphi(t_n)), \tag{5}$$

$$\frac{1}{a}\varphi(t) \leq \overline{\varphi}(t) \leq 2\frac{a}{a-1}\varphi(t). \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала неравенство (5). Левое неравенство в (5) очевидно, так как все слагаемые, стоящие под знаком суммы, являются неотрицательными.

Докажем правое неравенство в (5).

Пусть $t \in [t_n, t_{n+1})$. Тогда выполнено соотношение

$$\overline{\varphi}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi(t_j)\min\{\frac{t}{t_j}, 1\} =$$

$$\sum_{j=-\infty}^{n} \varphi(t_j) + t\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\varphi(t_j)}{t_j} \leq \frac{a}{a-1}(\varphi(t_n) + t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}}).$$

Докажем теперь неравенство (6).

Пусть $t \in [t_n, t_{n+1})$. Из неравенств

$$\varphi(t_n) \leq \varphi(t) \leq \varphi(t_{n+1}), \quad \frac{\varphi(t_n)}{t_n} \geq \frac{\varphi(t)}{t} \geq \frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}}$$

получим

$$t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} + \varphi(t_n) \leq t\frac{\varphi(t)}{t} + \varphi(t) \leq 2\varphi(t). \tag{7}$$

Таким образом, мы получили оценку сверху.

Приведем теперь оценку снизу. Для этого рассмотрим определение точки t_{n+1}. Если выполнено равенство $\varphi(t_{n+1}) = a\varphi(t_n)$, то справедливо соотношение

$$\varphi(t_n) + t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} \geq \varphi(t_n) = \frac{1}{a}\varphi(t_{n+1}) = \frac{1}{a}\varphi(t). \tag{8}$$

Если выполнено равенство $a\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} = \frac{\varphi(t_n)}{t_n}$, то справедливо соотношение

$$\varphi(t_n) + t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} \geq t\frac{\varphi(t_{n+1})}{t_{n+1}} = \frac{1}{a}t\frac{\varphi(t_n)}{t_n} \geq \frac{1}{a}t\frac{\varphi(t)}{t} = \frac{1}{a}\varphi(t). \tag{9}$$

Из неравенств (7) - (9), используя (5), получим неравенство (6).

Лемма доказана.

Следующая лемма носит технический характер. Она нам потребуется для следующей теоремы.

Лемма 2. *Зафиксируем* $1 \leq p \leq \infty$, *весовую функцию* w *и две неорицательных функции* $x(t)$, $y(t) \in L^p_w$.

Тогда справедливы неравенства

$$c_1(\|x|L^p_w\|^p + \|y|L^p_w\|^p) \leq \|x+y|L^p_w\|^p \leq c_2(\|x|L^p_w\|^p + \|y|L^p_w\|^p). \tag{10}$$

Причем можно положить $c_1 = 1$, $c_2 = 2^{p/p'}$, *где, как обычно,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Доказательство. Из неравенства Гельдера

$$a + b \leq (a^p + b^p)^{1/p} \cdot 2^{1/p'}$$

следует правое неравенство в (10).

Из элементарного неравенства

$$(a^p + b^p)^{1/p} \leq (a + b)$$

следует левое неравенство в (10).

Лемма доказана.

Следующая теорема показывает, что с помощью представления (5-6), полученного для функции φ, можно хорошо оценивать не только поточечные значения функции φ, но и норму функции φ в весовом пространстве Лебега.

Теорема 3. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$ *фиксировано. Пусть фиксирована функция* $\varphi \in K_{conc}$, *для которой выполнены условия (1).*

Тогда справедливы неравенства

$$c^{-1}(a,p)\|\varphi|L^p_w\| \leq (\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi(t_i)^p\|\min(1,\frac{t}{t_i})|L^p_w\|^p)^{1/p} \leq c(a,p)\|\varphi|L^p_w\|. \tag{11}$$

Доказательство. Зафиксируем $p \in (0,\infty)$. Из неравенств (6) следует, что достаточно вместо неравенства (11) доказать следующее неравенство

$$\|\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i,t_{i+1})|L^p_w\| \leq \|\overline{\varphi}|L^p_w\| \leq$$

$$\frac{a}{a-1}\|\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i,t_{i+1})|L^p_w\|. \tag{12}$$

Поэтому достаточно провести оценку величины

$$d = \| \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1}) | L^p_w \|.$$

Имеем

$$d^p = \| \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1}) | L^p_w \|^p =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \|(\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1}) | L^p_w \|^p$$

Для каждого из слагаемых, стоящих под знаком суммы, применим лемму 2. Тогда придем к оценкам

$$c_1(\|(\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p + \|t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p \le$$

$$\|(\varphi(t_i) + t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p \le$$

$$c_2(\|(\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p + \|t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p,$$

где константы c_1 и c_2 взяты из леммы 2.

Поэтому

$$c_1 d^p \le \sum_{-\infty}^{\infty} (\|(\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p + \|t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p \le c_2 d^p.$$

Положим

$$d_1^p = \sum_{-\infty}^{\infty} \|(\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p,$$

$$d_2^p = \sum_{-\infty}^{\infty} \|t\frac{\varphi(t_{i+1})}{t_{i+1}})\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p.$$

Тогда из (7) и равенства

$$\|\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p = \varphi^p(t_i)(\|\chi(t_i, \infty)|L^p_w\|^p - \|\chi(t_{i+1}, \infty)|L^p_w\|^p)$$

следует, что для d_1 выполняются соотношения

$$d_1^p = \sum_{-\infty}^{\infty} \|\varphi(t_i)\chi(t_i, t_{i+1})|L^p_w\|^p =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \varphi^p(t_i)(\|\chi(t_i, \infty)|L^p_w\|^p - \|\chi(t_{i+1}, \infty)|L^p_w\|^p) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi^p(t_i)-\varphi^p(t_{i-1}))\|\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p \leq$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi^p(t_i)\|\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p. \tag{13}$$

$$d_1^p=\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\chi(t_i,t_{i+1})|L^p_w\|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi^p(t_i)(\|\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p-\|\chi(t_{i+1},\infty)|L^p_w\|^p)=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\varphi^p(t_i)-\varphi^p(t_{i-1}))\|\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p \geq$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\varphi^p(t_i)(1-(\frac{1}{a})^p)\|\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p=$$

$$(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L^p_w\|^p. \tag{14}$$

Таким образом, (13) и (14) дают оценки d_1^p сверху и снизу.
Аналогично, из равенства

$$\|(\frac{\varphi(t_i)}{t_i}t\chi(t_{i-1},t_i)|L^p_w\|^p=(\frac{\varphi(t_i)}{t_i})^p(\|t\chi(0,t_i)|L^p_w\|^p-\|t\chi(0,t_{i-1})|L^p_w\|^p)$$

следует, что для d_2 выполняются соотношения

$$d_2^p=\sum_{-\infty}^{\infty}\|(\frac{\varphi(t_i)}{t_i}t\chi(t_{i-1},t_i)|L^p_w\|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{\varphi(t_i)}{t_i})^p(\|t\chi(0,t_i)|L^p_w\|^p-\|t\chi(0,t_{i-1})|L^p_w\|^p)\leq$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{\varphi(t_i)}{t_i})^p\|t\chi(0,t_i)|L^p_w\|^p, \tag{15}$$

$$d_2^p=\sum_{-\infty}^{\infty}\|(\frac{\varphi(t_i)}{t_i}t\chi(t_{i-1},t_i)|L^p_w\|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{\varphi(t_i)}{t_i})^p(\|t\chi(0,t_i)|L^p_w\|^p-\|t\chi(0,t_{i-1})|L^p_w\|^p)\geq$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(\frac{\varphi(t_i)}{t_i})^p(1-(\frac{1}{a})^p)\|t\chi(0,t_i)|L^p_w\|^p=$$

$$(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p. \qquad (16)$$

Таким образом, оценки (15) - (16) дают оценки d_2^p сверху и снизу.
Объединяя неравенства (13) и (15), получим, что выполняются соотношения

$$d_1^p+d_2^p\le\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L_w^p\|^p+\sum_{-\infty}^{\infty}\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L_w^p\|^p+\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p$$

Снова применим лемму 2. Тогда получим

$$d_1^p+d_2^p\le\sum_{-\infty}^{\infty}\|\min\{1,\frac{t}{t_i}\varphi(t_i)\chi(0,\infty)|L_w^p\|^p=$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\|\min\{1,\frac{t}{t_i}\varphi(t_i)\||L_w^p\|^p.$$

Таким образом, правое неравенство в (12) доказано.
Объединим теперь неравенства (14) и (16). Тогда получим, что справедлива оценка

$$d_1^p+d_2^p\ge$$

$$(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L_w^p\|^p+(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p=$$

$$(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}(\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L_w^p\|^p+\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p).$$

Опять применим лемму 2. Тогда получим

$$d_1^p+d_2^p=$$

$$(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}(\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)|L_w^p\|^p+\|t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p)\ge$$

$$2^{-p/p'}(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}(\|\varphi(t_i)\chi(t_i,\infty)+t\frac{\varphi(t_i)}{t_i}\chi(0,t_i)|L_w^p\|^p)=$$

$$2^{-p/p'}(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\min\{1,\frac{t}{t_i})\chi(0,\infty)|L_w^p\|^p=$$

$$2^{-p/p'}(1-(\frac{1}{a})^p)\sum_{-\infty}^{\infty}\|\varphi(t_i)\min\{1,\frac{t}{t_i})|L_w^p\|^p.$$

Таким образом, и левое неравенство в (12) доказано.

Теорема полностью доказана.

Замечание 4. *Теорему 3 можно интерпретировать и так. В условиях теоремы 1 все нормы* L^p_w *на представлении функции* φ *эквивалентны.*

Замечание 5. *Если для функции* $\varphi \in K_{conc}$ *условие (9) не выполняется, то выполняется условие*

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t} = c_0 < \infty.$$

Тогда точку t_0 *можно определить равенством*

$$t_0 = \sup\{t : c_0 t \le a\varphi(t)\},$$

$$t_{-1} = 0,$$

в заполняющей последовательности оставить только члены с натуральными индексами $i \ge -1$ *и на отрезке* $[0, t_0]$ *в качестве приближения взять функцию* $\varphi(t_0)\min\{1, \frac{t}{t_0}\}$. *Дальнейшие построения остаются неизменными.*

Библиографический список

1. *Бережной, Е.И.* О представимости некоторых конусов в L^p_v и экстраполяции операторов на конусах [Текст] / Е.И. Бережной, Л. Малигранда// Доклады РАН. Сер. математика. – 2006. – Т. 406. – С. 1-4.
2. *Берг, Й.* Интерполяционные пространства. Введение [Текст] / Й. Берг, Й. Лефстрем. – М.: Мир, 1980.
3. *Бренстед, А.* Введение в теорию выпуклых многогранников [Текст] / А. Бренстед. – М.: Мир, 1988.
4. *Фелпс, Р.* Лекции о теоремах Шоке [Текст] / Р. Фелпс. – М.: Мир, 1968.
5. *Sawyer, E.T.* Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces // Studia Math., 1990. – V. 96. – P. 145-158.
6. *Heinig, H., Maligranda, L.* Weighted inequalities for monotone and concave functions // Studia Math., 1995. – V. 116. – P. 133-165.
7. *Gol'dman, M.L., Heinig, H.P., Stepanov, V.D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Can. J. Math., 1996. – V. 48. – № 5. – P. 959-979.