

А.Э. Байдин

Особенности определения орбит визуально-двойных звёзд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 г. (государственный контракт № П1539).

Анализируются проблемы, возникающие при определении орбит на коротких дугах. Разработаны подходы определения эллиптических орбит визуально-двойных звезд на основе различных модификаций метода ПВД. Предложен метод определения круговых орбит, в котором не используется значение относительной лучевой скорости и сумма масс.

Ключевые слова: визуально-двойные звёзды, динамические методы определения орбит.

А.Э. Байдин

Особенности определения орбит визуально-двойных звёзд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения

We consider a problem of determination of visual binary stars' orbits on the basis of short arc observations. Dynamic methods of calculation of elliptical orbits are developed. They are modifications of the method of apparent motion parameters which is widely used at the Pulkovo Central Astronomical Observatory. The dynamical method of determination of circular orbits without using relative radial velocity and the sum of the masses of stars is also presented.

Ключевые слова: visual binary stars, dynamic methods for determination of orbits.

Число известных визуально-двойных звезд в настоящее время более 100000 [1], число рассчитанных орбит много меньше: шестой каталог орбит [2] на 31 декабря 2008 содержит 2124 орбиты. Основная причина, по которой у большинства звезд орбиты не определены – малая дуга, охваченная наблюдениями. При работе на коротких дугах появляется ряд особенностей: с уменьшением длины наблюденной дуги ухудшается сходимость методов; незначительные отклонения в позиционных наблюдениях приводят к большим ошибкам в определении элементов орбиты; одним и тем же наблюдениям одинаково хорошо соответствуют различные орбиты.

Классические методы, построенные на основе уравнения Тилля, непригодны для определения орбит на коротких дугах. Это можно заключить, рассмотрев уравнение Тилля [3]:

$$t_2 - t_1 - S_{12}/c = (1/n)[u_2 - u_1 - \sin(u_2 - u_1)]. \quad (1)$$

В случае малых разностей эксцентрисических аномалий в правой части функцию $\sin(u_2 - u_1)$ можно разложить в ряд, что упрощает вычисления. В левой части уравнения при малых углах площадь треугольника (S_{12}) будет примерно рав-

на площади, описываемой разделением (проекцией радиус-вектора на картинную плоскость), поэтому $S_{12}/c \approx t_2 - t_1$. Постоянная площадей (c) по наблюдениям на короткой дуге определяется довольно точно, но незначительные ошибки наблюдений ρ и θ приводят к неточному определению S_{12} и, следовательно, S_{12}/c . В итоге при вычислениях часто меняется даже знак выражения в левой части уравнения Тилля, хотя из наблюдений θ он очевиден.

Работу методов дифференциальных поправок на коротких дугах можно рассмотреть на примере метода Харткопфа, Макалистера, Франза [4]. Он является одной из модификаций метода дифференциальных поправок [5]. Отличается тем, что из семи неизвестных величин три определяются методом подбора. Использование метода подбора сделало метод глобально сходящимся, поэтому с помощью его можно получить элементы орбиты по короткой дуге.

В работе для анализа метода Харткопфа и др. моделируются эталонные орбиты с вариациями длины наблюденной дуги. Для получения эталонных данных необходимо решить уравнение

Кеплера, погрешность определения эксцентрической аномалии $\Delta u < 0.2''$, остальные вычислительные ошибки пренебрежимо малы. По эталонным данным при различных значениях эксцентриситета методом, предложенным Харткопфом и др. [4], определяются оставшиеся элементы орбиты, и исследуется функция среднеквадратичной ошибки в зависимости от величины эксцентри-

ситета. На рис. 1 построены графики функции среднеквадратичной ошибки в зависимости от значений эксцентриситета при определении элементов орбиты по дугам различной длины. Среднеквадратичная ошибка вычислялась по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\sum (\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2) / N}. \quad (2)$$

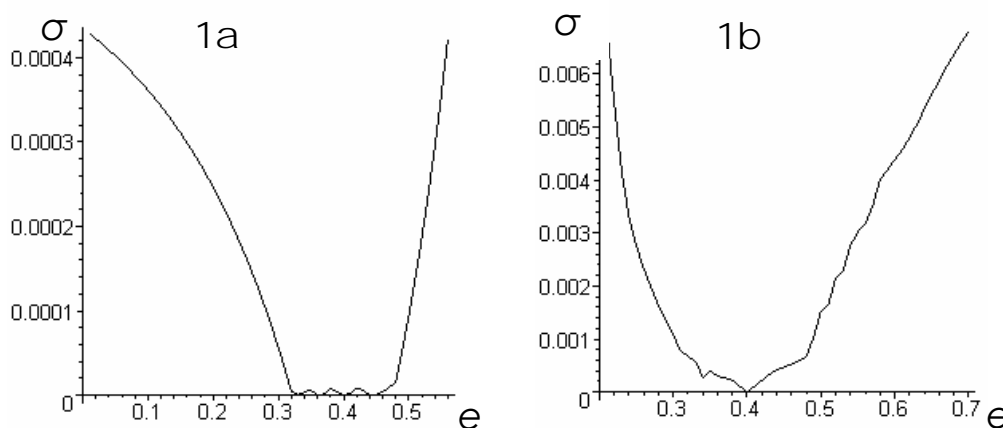


Рис. 1. Влияние значений эксцентриситетов на среднеквадратичные ошибки в относительных положениях звезды-спутника.

Моделированием было получено десять эталонных наблюдений, равномерно распределенных на дуге. На рис. 1а представлены результаты для случая, когда звезда-спутник прошла по орбите дугу 7° . На графике имеется несколько минимумов. Если значения разделений и позиционных углов точны, и среди выбираемых элементов присутствуют точные значения эксцентриситета, периода и момента прохождения периастра, то самый глубокий минимум соответствует истинным элементам орбиты. Но в реальных данных неизбежны ошибки, что приведет к появлению множества решений, одинаково хорошо удовлетворяющих наблюдениям. На рис. 1б элементы орбиты определялись по наблюдениям на дуге 50° . Истинным элементам орбиты соответствует полученный минимум, но среднеквадратичные ошибки, которые дают элементы орбит, отличных от истинной, сравнимы с погрешностью современных интерферометрических наблюдений [6].

Рассмотренные сложности привели к развитию новых подходов, отличающихся от классических, при определении орбит на коротких дугах. Новые методы являются динамическими. Наибольшую известность получил метод пара-

метров видимого движения (ПВД) [7]. Метод ПВД дает для полученных выше эталонных данных удовлетворительный результат, если правильно задан параллакс, относительная лучевая скорость и сумма масс компонент.

Особенность метода ПВД – использование суммы масс компонент для определения элементов орбиты. Определение масс звезд – основная задача изучения движений визуально-двойных звезд [3]. Для определения орбиты методом ПВД сумма масс должна быть известна изначально. Вторая особенность – использование относительных лучевых скоростей. Для долгопериодических пар значения относительных лучевых скоростей в каталогах практически отсутствуют, а точность их определения должна быть большой.

Метод определения круговых орбит.

В данной работе большинство обозначений аналогичны введенным в работах А.А. Киселева и др. [7, 8], вместо полярной системы координат используется декартовая. Рассмотрим метод определения круговых орбит на основе алгоритма метода ПВД, не использующий относительную лучевую скорость и сумму масс компонент. Для круговой орбиты параметры видимого движения

находятся методами, описанными А.А. Киселевым и О.В. Кияевой [7]. Применяется основное уравнение метода ПВД:

$$r^3 = \pm(k/\mu)^2 \rho \rho_c \sin(\psi - \theta). \quad (3)$$

Введем величину

$$r^* = \frac{r}{k^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{\rho \rho_c \sin(\psi - \theta)}{\mu^2}}. \quad (4)$$

Расстояние между компонентами можно выразить формулой

$$r = r^* k^{2/3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (5)$$

продифференцировав (5) и учтя, что для круговой орбиты производная длины радиус-вектора по времени равна нулю, находим

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0, \quad (6)$$

где x, y, z – декартовы координаты звезды-спутника относительно главной компоненты, \dot{z} – относительная лучевая скорость, \dot{x}, \dot{y} – проекции относительной скорости видимого движения (μ).

Второй закон Кеплера для круговой орбиты

$$p^{1/2} k = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (7)$$

В случае круговой орбиты расстояние между компонентами пары равно большой полуоси и параметру орбиты: $r = a/\pi_T = p$. Уравнения (5-7), с учетом равенства $r = p$, образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными (k, z, \dot{z})

$$\begin{cases} r^* k^{2/3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0 \\ (r^*)^{1/2} k^{4/3} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{cases}. \quad (8)$$

Систему уравнений (8) можно решить аналитически, например, исключив k и относительную лучевую скорость, получить уравнение

$$z^4 + (x^2 + y^2 - (r^*)^3(\dot{x}^2 + \dot{y}^2))z^2 - (r^*)^3(x\dot{x} + y\dot{y})^2 = 0, \quad (9)$$

в котором

$$-(r^*)^3(x\dot{x} + y\dot{y})^2 < 0. \quad (10)$$

Из (9) определяем z , из (5) k , из (6) относительную лучевую скорость. Уравнение (9), после замены переменной $t = z^2$, является квадратным. Так как выполняется (10), один из корней (t)

уравнения (9) является отрицательным, но z^2 не может быть меньше нуля, поэтому z^2 из (9) определяется однозначно. В итоге для проекции радиус-вектора на луч зрения (z) получаем положительное и отрицательное значение, что приводит к появлению известной неопределенности при нахождении восходящего узла [3]. Относительная лучевая скорость, определяемая из (6), в зависимости от z также будет иметь положительное и отрицательное значение.

Декартовы координаты звезды-спутника в формулах (5 – 9) измеряются в астрономических единицах, проекции скоростей в астрономических единицах в год. Для перевода расстояний в астрономические единицы используется тригонометрический параллакс двойной звезды (π_T). Его можно взять из каталога Hipparcos [9].

Сумму масс найдем, зная динамическую постоянную астроцентрического движения

$$k^2 = \frac{4\pi^2(M_A + M_B)}{M_\odot}. \quad (11)$$

Период P , наклонение орбиты i , позиционный угол линии узлов Ω , момент прохождения узла T_Ω находятся методами, аналогичными описанным в работе [8].

В качестве примера определим рассмотренным методом по короткой дуге элементы орбит ADS 48 (WDS 00057+4549) по данным Пулковского каталога [10] и трех звезд WDS 00366+5609, 01178+4901 и 04236+4226, орбиты двух последних ранее не вычислялись, по данным четвертого интерферометрического каталога [11]. Тригонометрические параллаксы взяты из каталога Hipparcos. Результаты представлены в табл. 1. При определении WDS 00057+4549 использовались только фотографические наблюдения Пулковского каталога [10] с 1961.753 по 1995.774 годы, длина дуги $\sim 15^\circ$. Орбита WDS 00366+5609 вычислена по наблюдениям 1982.6810-2005.034 годов на дуге $\sim 7.6^\circ$, из рассмотрения исключены HIP – 1991.25, TYC – 1991.59 и WSI – 1994.986. При определении орбиты WDS 01178+4901 использовались все наблюдения интерферометрического каталога [11] за исключением WSI, HIP и TYC, при определении WDS 04236+4226 исключено TYC2002.

Таблица 1

WDS	P , год	a , "	i , °	Ω , °	T_Ω , год	\dot{z} , а.е./год	M_{AB} , масс Солнца
00057+4549	548.86	6.06	50.7	2.27	1726.7	-0.61	1.20
00366+5609	923.32	0.534	134.2	172.5	1655.1	-0.41	2.39
01178+4901	3715.9	1.945	102.7	159.6	2988.1	0.16	16.12
04236+4226	616.49	0.532	115.0	7.3	2201.4	0.64	1.93

Определение орбиты при неизвестной относительной лучевой скорости.

Особенности определения орбит визуально-двойных звёзд на основе наблюдений коротких дуг видимого движения

При вычислении метод ПВД дает две различные орбиты, одинаково хорошо удовлетворяющие наблюдениям, одна из которых является неверной. Это происходит из-за неоднозначности определения наклона радиус-вектора относительно картинной плоскости, откуда следует неопределенность знака координаты z . В классических методах [3, 5] также существует неопределенность при вычислении орбит, но она отличается от неопределенности, полученной в методе ПВД. В классических методах неоднозначно определяются знаки проекции радиус-вектора на луч зрения и относительной лучевой скорости, что приводит к неопределенности в нахождении восходящего узла [3]. Верное решение выбирается после измерения относительной лучевой скорости (в рассмотренном выше методе для круговых орбит имеется аналогичная неопределенность). В методе ПВД у одной из орбит неоднозначно определяется только проекция радиус-вектора на луч зрения, что приводит к одной ошибочной орбите. Выбрать правильную орбиту можно, если из наблюдений лучевых скоростей определить относительное ускорение по лучу зрения или оценить знак величины $z\dot{z}$ в уравнении

$$z\dot{z} = r\dot{r} - x\dot{x} - y\dot{y}. \quad (12)$$

Основная трудность – найти из наблюдений \dot{r} , что в настоящее время затруднительно.

Ошибочная орбита плохо согласуется с наблюдениями, удаленными от используемых в вычислениях, поэтому правильную орбиту можно выбрать, применяя “старые” удаленные наблюдения. Такой подход был предложен в работе [12], кроме того, в ней рассматривается возможность использования удаленных по времени наблюдений для определения подбором суммы масс компонент и относительной лучевой скорости. В данной работе также развиваются методы, использующие старые данные помимо рядов высокоточных наблюдений на коротких дугах. Параметры видимого движения находятся методами, описанными А.А. Киселевым и О.В. Кияевой [7].

Для эллиптической орбиты справедливы следующие отношения:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (13)$$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \quad (14)$$

$$(p)^{1/2}k = |\mathbf{r} \times \mathbf{V}| = rV\sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{r}, \mathbf{V})} = r\sqrt{V^2 - \dot{r}^2}, \quad (15)$$

$$e \cos W = p/r - 1, \quad (16)$$

$$e \sin W = \dot{r}\sqrt{p/k^2}. \quad (17)$$

Уравнения (4, 13-17) образуют систему шести уравнений с восьмью неизвестными: r – расстояние между компонентами пары, \dot{r} – производная длины радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, по времени, k^2 – динамическая постоянная астрочентрического движения, z – проекция радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, на луч зрения, \dot{z} – относительная лучевая скорость, p – параметр орбиты, e – эксцентриситет, W – истинная аномалия.

Эксцентриситет (e) и истинную аномалию (W) найдем, используя метод подбора. Введем обозначения $C_1 = e \cos W + 1$ и $C_2 = e \sin W$, систему уравнений (4, 13-17) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} k^{4/3} r^{*2} = x^2 + y^2 + z^2 \\ k^{4/3} C_2 \sqrt{r^*/C_1} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} \\ k^{4/3} (C_1 + C_2^2/C_1) = r^* (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \end{cases}. \quad (18)$$

Далее, исключая z и \dot{z} , можно получить уравнение

$$k^{8/3} r^* C_1 - k^{4/3} (r^{*2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x^2 + y^2)(C_1 + C_2^2/C_1)/r^* - 2C_2 \sqrt{r^*/C_1} (x\dot{x} + y\dot{y})) + (x\dot{y} - y\dot{x})^2 = 0 \quad (19)$$

Из уравнения (19) находим динамическую постоянную астрочентрического движения (k^2), из системы (18), проекцию радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, на луч зрения (z) и относительную лучевую скорость (\dot{z}). Дальнейшие вычисления аналогичны рассмотренным в работах [7, 8]. Этот метод по точности аналогичен стандартному методу подбора по сумме масс и относительной лучевой скорости [12], но у рассмотренного подхода есть преимущества: интервалы возможных значений величин, определяемых подбором (эксцентриситета и истинной аномалии), одинаковы для всех вычисляемых орбит, решения получаются при любых их значениях. Для эталонных данных можно ожидать удовлетворительной точности (например, для суммы масс относительные ошибки <10%), если удаленные наблюдения более чем на 30° по позиционным углам отличаются от основных наблюдений, используемых в вычислениях.

Определение орбиты при известной относительной лучевой скорости

Если кроме позиционных наблюдений и параллакса известна относительная лучевая скорость на средний момент наблюдений, то уравнения (4, 13-17) образуют систему шести уравнений с семью неизвестными, ее можно решить,

применив метод подбора по сумме масс компонент или проекции радиус-вектора, алгоритм вычислений при этом ничем не отличается от метода ПВД. Но можно использовать другой подход: считать расстояние r между компонентами пары, входящее в систему уравнений (13-17), неизвестным. При этом исчезает необходимость использовать в вычислениях вторые производные по времени от разделения (ρ) и позиционного угла (θ). Подбором определяется эксцентриситет и истинная аномалия.

В этом случае известен астроцентрический вектор скорости. Из (15-17) можно найти выражение для производной длины радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, по времени

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{V^2}{1 + C_1^2/C_2^2}}. \quad (20)$$

Знак в (20) определяется в соответствии со знаком C_2 .

Из уравнений (13, 14) находим проекцию радиус-вектора, соединяющего компоненты пары, на луч зрения (z) и расстояние между компонентами пары (r), из уравнений (15, 16) динамическую постоянную астроцентрического движения

(k^2) и параметр орбиты (p). Дальнейшие вычисления аналогичны методу ПВД.

В качестве примера определим рассмотренным методом элементы орбит ADS 48 (WDS 00057+4549) и ADS 7251 (WDS 09144+5241) по данным Пулковского каталога [10]. Результаты представлены в табл. 2. Для всех звезд фотографические измерения были дополнены (с сайта <http://www.puldb.ru>) современными ПЗС-наблюдениями. Относительные лучевые скорости для ADS 48 взяты из работы Киселева и Кияевой [7], ADS 7251 из работы [13]. Для выбора значений эксцентриситета и истинной аномалии использовались “старые” наблюдения работы Гюнтцель-Лингнера [14] и наблюдения на короткой дуге. Для ADS 48 дополнительно применялось одно старое наблюдение Вашингтонского каталога [1]. При вычислении ADS 7251 первоначально было получено значение суммы масс, несоответствующее спектральному классу, поэтому кроме условия минимума среднеквадратичных отклонений при определении эксцентриситета и истинной аномалии было наложено условие на значения суммы масс $M_{AB} \in (0.9; 1)$.

Таблица 2

ADS	V_{BA} , km/s	P , yr	a , "	i , °	Ω , °	T_p	e	ω , °	M_{AB}
48	-1.4	433.43 ±56.90	4.831 ±0.372	34.33 ±4.59	20.40 ±16.13	1771.12 ±25.98	0.28 ±0.12	332.09 ±18.35	0.974 ±0.110
7251	0.4	1296.2	19.084	23.39	28.99	959.33	0.13	151.52	0.980

Метод ПВД позволяет оценить ошибки полученных элементов орбит. Это можно сделать и для рассмотренного метода. При вычислении элементов орбит используются: координаты и их производные по времени на средний момент времени $\rho_0, \theta_0, \dot{\rho}, \dot{\theta}$, относительная лучевая скорость \dot{z} , одно или несколько старых наблюдений (ρ_i, θ_i), поэтому, оценив ошибки этих величин,

можно с помощью подхода, предложенного А.А. Киселевым [15], определить ошибки элементов орбит. В табл. 2 представлены ошибки элементов орбиты ADS 48.

В заключение автор выражает благодарность за полезную дискуссию доктору физико-математических наук А.А. Киселеву.

Библиографический список

1. Mason B.D., Wycoff G.L., Hartkopf W.I. The Washington Visual Double Star Catalogue. Washington: US Naval Observatory, 2009.
2. Hartkopf W.I., Mason B.D. Sixth Catalog of Orbits of Visual Binary Stars. Washington: US Naval Observatory, 2009.
3. Куто, П. Наблюдения визуально-двойных звезд [текст]: [пер. с франц. Черепашук А.М.] / П. Куто. – М.: Мир, 1981. 240 с.
4. Hartkopf W.I., McAlister H.A., Franz O.G. Binary star orbits from speckle interferometry. II. Combined visual/speckle orbits of 28 close systems. *Astron. J.* v. 98, p. 1014-1039, 1989.
5. Ван ден Бос, В. Методы астрономии [текст]: под ред. Хилтнера В.А. – М.: Мир, 1967. с. 454-473.
6. Balega I.I., Balega Yu.Yu., Maksimov A.F. et al. Speckle interferometry of nearby multiple stars. II. *Astron. Astrophys.* v. 422, p. 627-629, 2004.
7. Киселев, А.А., Кияева, О.В. Определение орбиты визуально-двойной звезды методом параметров видимого движения из наблюдений на короткой дуге. *Астрон. журн.* т. 57, с. 1227-1241, 1980.
8. Киселев, А.А., Романенко, Л.Г. Динамическое исследование девяти широких визуально-двойных звезд в окрестностях Солнца. *Астрон. журн.* т. 73, с. 875-882, 1996.

9. ESA, The Hipparcos and Tycho Catalogues, ESA SP-1200 (1997).

10. Киселев, А.А., Калининченко, О.А., Кияева, О.В. и др., Каталог относительных положений 234 визуально-двойных звезд (<http://www.puldb.ru>, 2009).

11. Hartkopf W.I., Mason B.D., Wycoff G.L., McAlister H.A. Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars. Washington: US Naval Observatory, <http://ad.usno.navy.mil/wds/int4.html>, 2009.

12. Кияева, О.В. Использование далёких по времени наблюдений для уточнения орбиты визуально-двойной звез-

ды, полученной методом параметров видимого движения по короткой дуге. Астрон. журн. т. 60, с. 1208-1216, 1983.

13. Романенко, Л.Г., Ченцов, Е.Л. Определение относительных лучевых скоростей компонент визуально-двойных звёзд по наблюдениям на 6-м телескопе (БТА). Астрон. журн. т. 71, с. 278-281, 1994.

14. Guntzel-Lingner Von U. Bahnbestimmung von drei Doppelsternen mit grober Parallaxe (ADS 48, 7251 und 11632). Astron. Nachr. v. 282, p. 183-189, 1955.

15. Киселев, А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии [текст]: А.А. Киселев. – М: Наука, 1989. 264 с.