МАТЕМАТИКА, ФИЗИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 514.12

Н.П. Федотова

Униэкстремальные гиперплоскости конечномерных дискретных пространств

Данная работа посвящена изучению униэкстремальных гиперплоскостей пространства R^n с симметричными и специальными симметричными нормами в целочисленном случае. Исследуются все гиперплоскости, для которых целочисленная точка минимума евклидовой нормы является точкой минимума любой другой симметричной нормы. Приведены общий вид целочисленной точки единого экстремума и алгоритм ее нахождения.

Ключевые слова: симметричная норма, пространство R^n, униэкстремальная гиперплоскость, метрическая проекция, целочисленные оптимизационные задачи.

N.P. Fedotova

Uniextreme Hyperplanes of Finite-Dimensional Discrete Spaces

This paper concerns hyperplanes of integer-valued unified extremum in R^n vector space supplied with different symmetrical norms. We research all hyperplanes where for all polyhedrons the integer-valued point of Euclidean norm's minimum is also one of the nearest integer-valued points in any symmetrical norm. We explore general view of integer-valued unified extremum and build algorithm of finding them.

Key words: norm, Euclidean norm, symmetrical norm, linear vector space R^n, hyperplanes of unified extremum, metrical projection, integer-valued optimization problems, integer-valued unified extremum, algorithm.

Известно [4] следующее свойство гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ n-мерного пространства: для любого многогранника в этой плоскости вида $a_i \le x_i \le b_i$ ($i = 1,2,\ldots,n$) существует точка этого многогранника, в которой достигается минимум любой симметричной нормы.

В работе [5] рассмотрены понятия униэкстремальности в смысле симметричных и специальных симметричных норм и некоторые замечания, связанные с ними. Приведем эти определения.

Пересечение гиперплоскостей (и линейных многообразий) с различными параллелепипедами $a_i \le x_i \le b_i\ (i \in \overline{1,n})$ будем называть многогранниками вида D.

Будем говорить, что свойство U выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметричной нормы.

Специальной симметричной нормой N^s назовем норму, обладающую свойством: $\|(|x_1|,|x_2|,\ldots|x_n|)\|=\|(x_{\xi 1}, x_{\xi 2},\ldots x_{\xi n})\|$ для любой перестановки ξ.

Будем говорить, что свойство U^s выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой симметричной нормы.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U.

Определения свойства U и свойства униэкстремальности будут значительно короче, если ввести их через метрическую проекцию. Приведем эквивалентные определения свойств U и униэкстремальности в терминах элементов наилучшего приближения и метрической проекции.

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении элемента x из нормированного пространства X множеством приближающих элементов $K \subset X$:

$$\rho(x, K) = \inf\{\|x - y\| : y \in K\}.$$

Элемент $y^* = y(x) \in K$, для которого $\|x - y^*\| = \rho(x, K)$ называется элементом наилучшего приближения.

Совокупность элементов наилучшего приближения для $x \in X$ называется метрическим проектором и обозначается

$$P_K(x):\ P_K(x) = \{y \in K : \|x - y\| = \rho(x, K)\},$$

а отображение $P_K : X \to X$ или $x \mapsto P_K(x)$ называется метрической проекцией или оператором наилучшего приближения.

Совокупность элементов наилучшего приближения для $x \in X$ будем обозначать через $P_{K,N}(x)$, если расстояние ρ определено через норму N.

Гиперплоскость G обладает свойством U, если $P_{G,E}(0) \in P_{G,N}(0)$ для любой симметричной нормы N, где E – евклидова норма, 0 – нулевой элемент пространства R^n.

В данном случае метрическая проекция в некотором смысле не зависит от того, каким образом определено расстояние.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U.

Будем говорить, что свойство U^s выполнено для гиперплоскости (или многогранника вида D), если точка этой гиперплоскости (или многогранника вида D), в которой достигается минимум евклидовой нормы, является точкой минимума любой другой специальной симметричной нормы.

Гиперплоскость пространства R^n будем называть униэкстремальной в смысле специальной симметричной нормы, если на любом многограннике вида D этой гиперплоскости выполнено свойство U^s.

В работе [5] исследованы все униэкстремальные гиперплоскости и доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Гиперплоскость n-мерного пространства обладает U-свойством тогда и только тогда, когда она задается уравнением одного из следующих видов:

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$;

(2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = const \neq 0$;

(3) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const \neq 0$ ($\alpha_i \in \{-1,0,1\}$, $i=1,2,\dots,n$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, то есть количество коэффициентов равных единице равно количеству коэффициентов равных минус единице.

Теорема 2. Гиперплоскость n-мерного пространства обладает U^s-свойством тогда и только тогда, когда она задается уравнением одного из следующих видов:

(1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$ $\alpha_i \in \{-1,0,1\}$, $i=1,2,\dots,n$.

Теорема 3. В пространстве R^2 гиперплоскость является униэкстремальной тогда и только тогда, когда она задается уравнением одного из следующих видов:

1) $x_1 + x_2 = const$

2) $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

В пространстве R^n при $n>2$ гиперплоскость является униэкстремальной тогда и только тогда, когда она задается уравнением одного из следующих видов:

1) $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$

2) $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$.

Теорема 4. В пространстве R^n гиперплоскость является униэкстремальной относительно специальных симметричных норм тогда и только тогда, когда она задается уравнением одного из следующих видов:

1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, где $\alpha_i \in \{-1,0,1\}$

2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, причем среди коэффициентов уравнения отличны от нуля только один или два коэффициента.

В работе [6] установлен общий вид точки экстремума. Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. Для многогранников вида D гиперплоскостей вида $\sum_{i=1}^{n} x_i = const$ общий вид единой точки экстремума таков: каждая координата может быть первого или второго рода. Для координат первого рода $x_i = a_i$ или $x_i = b_i$. Для координат второго рода $x_i = (c-s) / (n-k)$, где c – константа из уравнения гиперплоскости, k – количество координат первого рода, s – сумма координат первого рода, n – размерность гиперплоскости. Иными словами, k – количество координат первого рода (принимающих граничные значения), а остальные координаты равны между собой.

Свойство униэкстремальности может быть использовано при решении различных дискретных задач с соответствующим условием: задачи о равномерном назначении [3], классической задачи о целочисленном сбалансировании матрицы [1], задачи о целочисленном сбалансировании трехмерной матрицы [2] и других.

Во всех перечисленных задачах ограничения являются целочисленными. Поэтому представляется интересным исследовать, останется ли теория униэкстремальных гиперплоскостей справедливой, если наложить дополнительные ограничения на значения параметров и переменных таким образом, чтобы они были целыми.

Итак, в данной статье мы будем исследовать U-свойство и U^s-свойство, а также униэкстремальность относительно симметричных и специальных симметричных норм для класса гиперплоскостей, задаваемых уравнением $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const, \alpha_i, x_i, const \in Z$.

При рассмотрении параллелепипедов $\{a_i \le x_i \le b_i, i = 1,2,...,n\}$ мы также будем считать, что $a_i, b_i \in Z$.

Сначала приведем некоторые соображения, вследствие которых мы ограничим рассмотрение только классами гиперплоскостей, описанных в теоремах 1, 2, 3 и 4. Мы не будем проверять данное свойство для других гиперплоскостей, потому что если гиперплоскость не обладает свойством униэкстремальности, то можно указать параллелепипед и симметричную норму, в которой метрический проектор нуля по норме L_2 не принадлежит метрическому проектору нуля по некоторой симметричной (специальной симметричной) норме *N*. В этом случае при изменении масштаба (то есть умножении a_i , b_i и *const* на большое целое число) две точки минимумов окажутся далеко друг от друга, а целочисленные точки минимума будут лежать около них и не совпадут. Иными словами, если для некоторого класса гиперплоскостей свойство униэкстремальности относительно симметричных или специальных симметричных норм не выполнено, то и для целочисленных задач данный класс гиперплоскостей не может обладать им. Аналогичное соображение действует и при изучении U-свойства или U^s-свойства.

Целочисленная униэкстремальность гиперплоскостей

Для вывода результатов этой главы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть дана произвольная симметричная норма N и точка *E* с координатами ($x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$), где $x_2^* > x_1^*$. Рассмотрим точку *F* с координатами ($x_1^* + \delta, x_2^* - \delta, x_3^*, ..., x_n^*$), где $0 < \delta \le \frac{(x_2^* - x_1^*)}{2}$. Тогда значение нормы N во второй точке не превосходит значения нормы в первой точке $N(F) \le N(E)$, причем в некоторых нормах (например, норме L_2 и других строго выпуклых нормах) неравенство строгое.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим линейное многообразие

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_1^* + x_2^* \\ x_i = x_i^*, i = 3,4,...,n \end{cases}$$

которое является прямой и содержит обе точки *E* и *F*. В [5] было доказано, что метрический проектор нуля во всех симметричных нормах содержит точку О с координатами

$$\frac{x_1^* + x_2^*}{2}, \frac{x_1^* + x_2^*}{2}, x_3^*, ..., x_n^*$$

По построению точка *F* ближе к точке О, чем точка *E*. Но, как известно [5], норма *N* убывает при удалении от точки О вдоль прямой, лежащей в данном линейном многообразии, значит $N(F) \le N(E)$.

Лемма 1 доказана.

Теперь вернемся к целочисленному случаю и докажем, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Рассмотрим произвольное линейное многообразие

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = const, \_ x_i = \alpha_i \_ при \_ i = k+1, k+2, ..., n.$$

Здесь значения α_i и *const* являются целыми числами. Тогда для любой симметричной нормы *N* минимум расстояния от начала координат до целочисленных точек многообразия по данной норме достигается в точке *E* с координатами ($m+1, m+1, ..., m+1, m, m, ..., m, \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, ..., \alpha_n$), где координат, равных *m*+1, всего *l* штук, координат, равных *m,* всего *k-l* штук, и *m* – это частное от деления *const* на *k* , а *l* – остаток от деления *const* на *k*.

Доказательство утверждения 1. Заметим предварительно, что если *l=0 ,* то есть *const=mk*, то метрический проектор нуля попадает в целочисленную точку, откуда по теореме 3 делаем вывод, что именно в этой точке и достигается минимум расстояния от начала координат до целочисленных точек многообразия по любой симметричной норме.

В случае, когда метрический проектор попадает не в целочисленную точку, доказательство утверждения 1 проведем с помощью леммы 1 и «принципа крайнего». Обозначим через *F*($x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$) ту точку минимума расстояния от начала координат по данной норме до целочисленных точек многообразия, для которой дополнительно выполнены следующие свойства: первые *k* координат идут в порядке невозрастания (поскольку норма *N* является симметричной, то мы без ограничения общности можем так считать), и при этом $x_1^* - x_k^*$ минимально. Докажем, что точки *E* и *F* совпадают.

По условию *const=mk+l*. Далее, если $x_1^* - x_k^* = 1$, то точки *E* и *F* совпадают, так как $\sum_{i=1}^{k} x_i^* = const$. Действительно, координаты точки *F* целые, они равны *m* или *m*+1, координат, равных *m*+1, ровно *l* штук, и координаты идут в порядке невозрастания.

Предположим, точка *F* отлична от точки *E* и при этом *N*(*F*)<*N*(*E*). Тогда выполнено неравенство $x_1^* - x_k^* > 1$. Поскольку речь идет о целых числах, то $x_1^* - x_k^* \ge 2$ или $x_1^* - 1 \ge x_k^* + 1$. Применяя лемму 15 получим, что значение нормы *N* в точке *F* не может быть лучше, чем значение нормы *N* в точке

$$(x_1^* - 1, x_2^*, ..., x_k^* + 1, x_{k+1}^*, ..., x_n^*).$$

После этого шага при пересортировке координат либо $x^*_1 - x^*_k$ уже стало меньше, либо оно останется прежним, снова будет не меньше 2 и мы сможем сделать еще такие же шаги. В любом случае, не позже чем через *k/*2 шагов мы получим противоречие с предположением о выборе точки *F*.

Утверждение 1 доказано.

Заметим, что из этого утверждения, в частности, следует U-свойство в целочисленном варианте для гиперплоскостей, задаваемых уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = const$$

Докажем теперь целочисленную униэкстремальность для класса гиперплоскостей $\sum_{i=1}^{n} x_i = const \in Z$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Рассмотрим произвольный параллелепипед с целыми границами $\{a_i \le x_i \le b_i, i = 1,...,n\}$ в пересечении с гиперплоскостью $\sum_{i=1}^{n} x_i = const \in Z$ и назовем его множеством M. Тогда существует такая точка из M, в которой достигается минимум расстояния от начала координат до целочисленных точек M для всех симметричных норм.

Доказательство теоремы 6. Как известно [5], точка Y – метрический проектор нуля в норме L_2 – является точкой метрического проектора нуля в произвольной симметричной норме. Пусть ее координаты ($y_1, y_2,..., y_n$). Обозначим через Σ_1 множество тех индексов, где координаты y_i принимают наименьшие возможные значения на множестве M: $\Sigma_1 = \{i : y_i = a_i\}$. Аналогично обозначим через Σ_2 множество тех индексов, где координаты y_i принимают наибольшие возможные значения на множестве M: $\Sigma_2 = \{i : y_i = b_i\}$, а через Σ_3 – множество тех индексов, где координаты y_i принимают промежуточные возможные значения на множестве M: $\Sigma_3 = \{i : a_1 < y_i < b_i\}$.

Все значения координат из первых двух наборов являются целыми, а все значения из третьего набора равны (см. [5]). Если они, в свою очередь, окажутся целыми, то в этом случае доказательство теоремы завершено. Пусть они принимают нецелые значения, равные c_1. Ясно, что из-за целочисленности ограничений в задаче, они могут принимать в качестве значений целые части снизу и сверху от c_1. Заметим, что из леммы 1 следует, что $a_i > c_1$ при $i \in \Sigma_1$, и, аналогично, $b_i < c_1$ при $i \in \Sigma_2$, иначе можно найти точку лучше Y (причем, по крайней мере в норме L_2 , строго лучше).

Далее, пусть точка Z минимума расстояний от начала координат до целочисленных точек множества M в некоторой симметричной норме N, а ее координаты ($z_1, z_2,..., z_n$). Возьмем любой индекс i из Σ_1 и покажем, что $z_i = a_i$. Действительно, если $z_i > a_i$, то $z_i \ge a_i + 1$ из соображений целочисленности. Поскольку сумма всех координат у точек Y и Z одинакова, то среди координат точки Z найдется такая, которую можно увеличить на 1, не выходя за пределы рассматриваемого параллелепипеда. В частности, обязательно найдется координата с индексом j из множества Σ_3, для которой $z_j < c_1 < a_i$. В этом случае $z_i - z_j \ge 2$, первую из этих координат можно уменьшить на 1, а вторую увеличить на 1, не выходя за пределы множества M. По лемме 1 в новой полученной точке норма будет по крайней мере не больше, чем норма в точке Z. Поступая таким образом многократно, мы придем к целочисленной точке, у которой все координаты с индексами из Σ_1 принимают значения $z_i = a_i$, точка принадлежит множеству M, а норма в ней не превосходит норму в исходной точке Z.

Аналогичным образом доказываются соотношения $z_i = b_i$ для индексов i из Σ_2. Тем самым, мы установили, что хотя бы одна точка целочисленного минимума (будем считать, что это точка Z) находится на той же грани параллелепипеда,

$$\begin{cases} x_i = a_i, \_при\_i \in \Sigma_1; \\ x_i = b_i, \_при\_i \in \Sigma_2; \\ \sum_{i \in \Sigma_3} x_i = const - \sum_{i \in \Sigma_1} a_i - \sum_{i \in \Sigma_2} b_i \end{cases}$$

что и точка Y. Это дает нам право применить утверждение 5. Точка, в которой достигаются минимумы всех симметричных норм, принадлежит рассматриваемому параллелепипеду, поскольку

$$\left\{ \sum_{i \in \Sigma_3} x_i = const - \sum_{i \in \Sigma_1} a_i - \sum_{i \in \Sigma_2} b_i = c_1 \cdot |\Sigma_3| \right.,$$

а каждая из координат с индексами из Σ_3 может принимать в качестве значений оба целых числа рядом с c_1.

Доказательство теоремы 6 завершено.

Утверждение 2. Гиперплоскость, задаваемая уравнением $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$ в пространстве R^n обладает свойством целочисленной униэкстремальности.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим произвольный параллелепипед с целыми границами $\{a_i \le x_i \le b_i, i = 1,...,n\}$ в пересечении с гиперплоскостью $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$ и назовем его множеством M. В [5] мы получили, что минимум расстояний по любой симметричной норме *N* до множества M достигается при

$$x_n = \begin{cases} 0, если\_a_n * b_n < 0 \\ \min\{|a_n|, |b_n|\}, иначе \end{cases}$$

независимо от ограничений по другим координатам. Это остается верным и в целочисленном случае, поскольку из ограничений задачи $\min\{|a_n|, |b_n|\}$ и ноль – целые числа (значит и x_n тоже целое). Далее доказательство проходит целиком по схеме доказательства предыдущей теоремы 6. Надо разбить все координаты на три множества в зависимости от их значений в точке метрического проектора, затем рассмотреть точку наилучшего приближения M в целых числах, доказать, что она находится на той же грани и применить утверждение 1.

Утверждение 2 доказано.

Заметим, что в двумерном случае все подпространства обладают свойством целочисленной униэкстремальности как относительно симметричных норм, так и относительно специальных симметричных норм. Действительно, все эти подпространства являются прямыми на плоскости, минимум любой симметричной нормы, очевидно, достигается в нуле, а при удалении от нуля нормы строго монотонно растут по свойству однородности. Значит, минимум будет достигаться в нуле или в ближайшей к нему в смысле нормы L_2 целочисленной точке отрезка.

Для специальных симметричных норм все гиперплоскости, которые обладают свойством униэкстремальности, обладают им и для целочисленных задач. Докажем сначала, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 3. Гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, где $\alpha_i \in \{-1,0,1\}$ обладают свойством целочисленной униэкстремальности относительно специальных симметричных норм.

Доказательство утверждения 3. Схема доказательства данного утверждения остается такой же, как и в случае произвольных коэффициентов уравнения и ограничений на координаты. Сначала мы фиксируем некий параллелепипед. Потом заменяем знак у переменных, которые входят в уравнение с коэффициентом -1, и при этом меняем знак у ограничений a_i и b_i, а также переставляем их местами.

Затем для свободных переменных, которые не входят в уравнение, и, следовательно, их значение равно

$$x_i = c_i = \begin{cases} 0, если\_a_i * b_i < 0 \\ \min\{|a_i|, |b_i|\}, иначе \end{cases}$$

В результате получается задача нахождения ближайшей целой точки от начала координат до множества:

$$\begin{cases} \sum\limits_{|\alpha_i|=1} x_i = const \\ a_i \le x_i \le b_i, если\_\alpha_i = 1 \\ -b_i \le x_i \le -a_i, если\_\alpha_i = -1 \\ x_i = c_i, если\_\alpha_i = 0 \end{cases}$$

Окончание доказательства проводится по схеме доказательства теоремы 6.

Утверждение 3 доказано.

Покажем теперь, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 4. Все подпространства в R^n при $n>2$, задаваемые уравнениями $\alpha x_1 + \beta x_2 = 0, \alpha, \beta \in Z, \alpha^2 + \beta^2 \ne 0$ обладают свойством целочисленной униэкстремальности относительно специальных симметричных норм.

Доказательство утверждения 4.

Снова зафиксируем произвольный параллелепипед, установим значения свободных переменных

$$x_i = c_i = \begin{cases} 0, если\_a_i * b_i < 0 \\ \min\{|a_i|, |b_i|\}, иначе \end{cases} \text{ при } i=3,4,\ldots,n.$$

После этого задача сводится к нахождению ближайшей целой точки от начала координат до отрезка (может быть вырожденного)

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2 \le x_2 \le b_2 \\ x_i = c_i, i = 3,4,...,n \end{cases}$$

В [5] показано, что для любой специальной симметричной нормы N^s функция $f(t_1, t_2) = N^s(t_1, t_2, c_3, ..., c_n)$ имеет минимум в точке $t_1=t_2=0$ и возрастает по любому лучу, исходящему из этой точки. Отсюда, как и в случае произвольных коэффициентов и ограничений на координаты, заключаем, что искомый минимум, независимо от нормы, находится в точке $t_1=t_2=0$ или в ближайшей в смысле нормы L_2 целочисленной точке отрезка.

Утверждение 4 доказано.

Алгоритм нахождения точки метрического проектора

Опишем алгоритм, по которому для любой симметричной нормы и любого параллелепипеда можно найти одну из точек метрического проектора нуля. Случай двумерного пространства мы рассматривать не будем, так как он не представляет ни практического интереса, ни сложностей при нахождении точки экстремума.

Итак, рассмотрим гиперплоскость $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = const$ в пересечении с произвольным параллелепипедом $a_i \le x_i \le b_i$ ($i=1,2,\ldots,n$) и обозначим это множество через М. Перед началом дальнейшего построения, убедимся, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \le const \le \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Данное условие является необходимым и достаточным для того, чтобы параллелепипед пересекался с рассматриваемой гиперплоскостью, множество М было непустым, а задача имела смысл.

Рассмотрим точку *E* этой гиперплоскости с координатами ($c_1, c_1, \ldots, c_1$), где $c_1 = const/n$. Если она попадает в рассматриваемый параллелепипед, то она и является метрическим проектором нуля по любой симметричной норме. Если точка *E* не попадает в рассматриваемый параллелепипед, то для некоторых индексов $c_1 \le a_i$ (обозначим множество этих индексов через Σ_1), а для некоторых индексов $c_1 \ge b_i$ (множество таких индексов обозначим через Σ_2). По крайней мере одно из этих множеств непустое. Множество оставшихся индексов, где переменные принимают промежуточное между своим минимальным и своим максимальным значение, обозначим через Σ_3. Далее сравним две суммы и предположим для определенности, что

$$\sum_{i \in \Sigma_1} (a_i - c_1) \le \sum_{i \in \Sigma_2} (c_1 - b_i).$$

Покажем, что независимо от выбора симметричной нормы хотя бы для одной точки метрического проектора нуля выполнено $x_i^* = b_i$ при всех $i \in \Sigma_2$. Действительно, пусть некоторая точка *F* с координатами $\left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ принадлежит метрическому проектору нуля по симметричной норме *N,* и при этом найдется индекс $i \in \Sigma_2$, такой что $x_i^* < b_i$. Учитывая, что обе точки *E* и *F* принадлежат одной и той же гиперплоскости, а также приведенное выше неравенство, получаем серию неравенств

$$0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^* - const = \sum_{i=1}^{n} (x_i^* - c_1) = \sum_{i \in \Sigma_1} (x_i^* - c_1) + \sum_{i \in \Sigma_2} (x_i^* - c_1) + \sum_{i \in \Sigma_3} (x_i^* - c_1) < \sum_{i \in \Sigma_1} (x_i^* - c_1) + \sum_{i \in \Sigma_2} (b_i - c_1)$$

$$+ \sum_{i \in \Sigma_3} (x_i^* - c_1) \le \sum_{i \in \Sigma_1} (x_i^* - c_1) + \sum_{i \in \Sigma_1} (c_1 - a_i) + \sum_{i \in \Sigma_3} (x_i^* - c_1) = \sum_{i \in \Sigma_1} (x_i^* - a_i) + \sum_{i \in \Sigma_3} (x_i^* - c_1)$$

откуда следует, что либо найдется координата с индексом $j \in \Sigma_1$ такая, что $x_j^* > a_j$, либо найдется координата с индексом $j \in \Sigma_3$ такая, что $x_j^* > c_1$. В обоих случаях $x_j^* > c_1 \ge b_i > x_i^*$, причем можно подобрать величину $\delta = b_i - x_i^* > 0$ так, что координату x_j^* мы можем уменьшить на δ, а координату x_i^* мы можем увеличить на δ, не выходя за пределы множества М. Применяя лемму 1, мы можем перейти от точки *F* к точке F_1, в которой для любой симметричной нормы $N(F_1) \le N(F)$, и все координаты с индексами из множества Σ_2 принимают свои максимальные значения.

Итак, проделав один шаг алгоритма нахождения точки метрического проектора нуля, мы определили грань нашего параллелепипеда, на которой расположена хотя бы одна точка метрического проектора:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i \in \Sigma_1 \bigcup \Sigma_3} x_i = const_2 = const - \sum\limits_{i \in \Sigma_2} b_i \\ a_i \le x_i \le b_i, i \in \Sigma_1 \bigcup \Sigma_3 \\ x_i = b_i, i \in \Sigma_2 \end{cases}$$

Далее шаги алгоритма повторяются. Мы каждый раз рассматриваем точку, в которой все свободные координаты равны. Если она попадает в параллелепипед, то она и является искомой. Если же некоторые ее координаты не попадают в отведенный им диапазон, то мы сравниваем две суммы и делаем вывод, какие из свободных координат можно зафиксировать, сделав равными либо своим максимальным, либо своим минимальным возможным значениям. При этом на каждом шаге мы переходим к грани меньшей размерности нашего параллелепипеда. Поскольку множество М непустое, а пространство конечномерно, то рано или поздно процесс закончится, и мы получим искомую точку метрического проектора нуля для любой симметричной нормы.

Приведенный алгоритм без каких-либо изменений применим и для других классов гиперплоскостей. Так, если мы будем искать точку метрического проектора нуля для гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n-1} x_i = 0$, то сначала мы проверим условие непустоты нашего множества М, затем зафиксируем свободную координату

$$x_n = \begin{cases} 0, если\_a_n * b_n < 0 \\ \min\{|a_n|,|b_n|\}, иначе \end{cases},$$

а затем начнем выполнять шаги алгоритма, как это описано выше.

Для случая специальных симметричных норм для гиперплоскостей

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = const$, где $\alpha_i \in \{-1,0,1\}$

после проверки непустоты множества М мы приведем условие задачи к виду

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha_i|=1} x_i = const \\ a_i \le x_i \le b_i, если\_\alpha_i = 1 \\ -b_i \le x_i \le -a_i, если\_\alpha_i = -1 \\ x_i = c_i, если\_\alpha_i = 0 \end{cases}, \text{ где } c_i = \begin{cases} 0, если\_a_i * b_i < 0 \\ \min\{|a_i|,|b_i|\}, иначе \end{cases}$$

таким же способом, как это было сделано при доказательстве утверждения 3.

Далее мы будем проделывать шаги алгоритма до получения ответа.

Если же рассматривать гиперплоскости $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, где среди коэффициентов уравнения отличны от нуля только один или два коэффициента, то мы проверим осмысленность задачи, зафиксируем значения свободных переменных, как это было сделано в утверждении 4

$$x_i = c_i = \begin{cases} 0, если\_a_i * b_i < 0 \\ \min\{|a_i|,|b_i|\}, иначе \end{cases} \text{ при } i = 3,4,\ldots,n$$

и перейдем к рассмотрению задачи

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = 0 \\ a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2 \le x_2 \le b_2 \\ x_i = c_i, i = 3,4,\ldots,n \end{cases}$$

В данном случае далее потребуется сделать не более одного шага изложенного выше алгоритма для того, чтобы найти искомую точку.

Сделаем также следующее важное замечание. При решении целочисленных задач применение алгоритма во всех описанных выше случаях проводится полностью аналогично. Доказательство правильности выполнения одного шага алгоритма также почти не отличается от приведенного выше.

Таким образом, мы показали, что все гиперплоскости, которые обладают свойством униэкстремальности относительно симметричных или специальных симметричных норм, обладают и свойством целочисленной униэкстремальности.

Кроме того, мы привели алгоритм нахождения точек метрического проектора для всех классов гиперплоскостей как для случая симметричных норм, так и для случая специальных симметричных норм.

Во всех случаях точка метрического проектора устроена следующим образом: все ее свободные координаты равны между собой (в целочисленных задачах они могут отличаться на 1 из-за округлений), все ее координаты, которые больше этого значения, принимают свои наименьшие возможные значения, а все ее координаты, которые меньше этого значения, принимают свои наибольшие возможные значения.

Библиографический список

1. Коршунова, Н.М. Задача целочисленного сбалансирования матрицы [Текст] / Н.М. Коршунова, В.С. Рублев // Современные проблемы математики и информатики. – Вып. 3. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2000. – С. 145–150.

2. Рублев, В.С. Задача целочисленного сбалансирования трехмерной матрицы и алгоритмы ее решения [Текст] / В.С.Рублев, А.В. Смирнов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2010. – Т. 17, № 2. – С. 72–98.

3. Рублев, В.С. Выбор критерия оптимизации в задаче о равномерном назначении [Текст] : в 17 т. / В.С. Рублев, Н.Б. Чаплыгина // Дискретная математика – Вып. 4. – 2005 – С. 150–157.

4. Рублев, В.С. О некоторой характерной точке одного класса многогранников в симметрических пространствах [Текст] / В.С. Рублев, Н.Б. Чаплыгина // ДАН – 2006. – № 2. – С. 176–178.

5. Федотова, Н.П. Гиперплоскости универсальной экстремали некоторых задач оптимизации [Текст] / Н.П. Федотова // Моделирование и анализ информационных систем. – 2010. – Т. 17, № 3. – С. 91–106.

6. Федотова, Н.П. О расстоянии до гиперплоскостей в симметрических нормах [Текст] / Н.П. Федотова // Ярославский педагогический вестник. Серия «Физико-математические и естественные науки». – Вып. 2. – 2010. – С. 33–38.