УДК 539.1

В.Г. Кречет, Е.Ю. Орлова

Астрофизические эффекты взаимодействия спинорного и гравитационного вихревого полей

Рассматривается динамика спинорного и гравитационного вихревого полей. Получены соответствующие точные решения гравитационных уравнений. Показано, что вихревое гравитационное поле может образовывать «кротовые норы», источником которого может являться спинорное поле с поляризованным спином.

Ключевые слова: спинорные поля, «кротовые норы», вихревое гравитационное поле.

V.G. Krechet, E.Ju. Orlova

Astrophysical Effects of Spinor and Gravitational Vortex Field Interaction

We consider the dynamics of spinor and gravitational vortex fields. The corresponding exact solutions to the gravitation equation have been found. It is shown that a vortex gravitation field got of a spinor field with a polarized spin can build "wormholes". The corresponding exact solutions to the gravitation equation have been found.

Key words: spinor fields, "wormholes", a vortex gravitation field.

В наших работах мы показали [2, 3], что в общем случае спинорное поле взаимодействует с вихревой составляющей гравитационного поля так, что лагранжиан взаимодействия между ними равен $L_{\text{int}} = \frac{\hbar c}{2}\omega^k \Psi^+ \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \Psi$. Здесь $S_k = \frac{\hbar c}{2}\Psi^+ \tilde{\gamma}_k \tilde{\gamma}_5 \Psi$ – плотность потока спина спинорного поля, а $\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm} e_k^{(a)} e_{(a)l,m}$ – характеристика вихря гравитационного поля, представляющая собой четырехмерный ротор тетрады. С кинематической точки зрения ω^i – угловая скорость вращения поля тетрад. Тогда плотность углового момента (спина) гравитационного поля $S_q^k = \frac{\omega^k}{2\chi}$, то есть лагранжиан взаимодействия описывает спин-спиновое взаимодействие спинорного и гравитационного полей.

Чтобы показать возможность реального существования системы взаимодействующих спинорного и вихревого гравитационного полей, взаимодействие которых в общем случае представлено в работах [2, 3], рассмотрим конкретный пример решения совместной системы гравитационных уравнений Эйнштейна для самогравитирующего спинорного поля и спинорных уравнений в пространстве – времени, где может существовать вихревое гравитационное поле.

Один из простых примеров пространства – времени, где может существовать вихревое гравитационное поле, есть стационарное пространство – время с цилиндрической симметрией, описываемое метрикой:

$$dS^2 = Adx^2 + Bd\alpha^2 + Cdz^2 - Ddt^2 + 2Ed\alpha dt, \qquad (1)$$

где метрические коэффициенты A, B, C, D, E являются функциями только от радиальной координаты x.

В этом пространстве может существовать стационарное вихревое гравитационное поле, описываемое вектором ω^k , направленным вдоль оси симметрии OZ и определяемым формулой, в соответствии с $\omega^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{iklm} e_k^{(a)} e_{(a)l,m}$. Вычисления показывают, что здесь угловая скорость тетрадного репера равна

$$\omega^k = \delta_3^k \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{AC\left(E^2 + BD\right)}}, \tag{2}$$

то есть направлена вдоль оси симметрии OZ так, что модуль этого вектора $\omega = \sqrt{\omega^\alpha \omega_\alpha}$ равен $\omega = \frac{E'D - D'E}{2D\sqrt{A\left(E^2 + BD\right)}}$.

Здесь выбрана хронометрическая система отсчета с единичным вектором монады τ_i, задающим систему отсчета, определяемым выражением

$$\tau^i = \left(0,0,0,\frac{1}{\sqrt{D}}\right); \tau^i \tau_i = -1. \tag{3}$$

Он же является времениподобным вектором e_4^i тетрадного репера $e_{(a)}^i$: $\tau^i = e_4^i$. В такой системе отсчета мировые линии точек системы отсчета с единичным касательным вектором τ_i (3) совпадают с координатными линиями времени.

В пространстве – времени с метрикой (1) решаем систему уравнений Эйнштейна – Дирака:

$$\begin{cases} \mathrm{R_{ik}} = \chi\left(\mathrm{T_{ik}} - \frac{1}{2}\mathrm{Tg_{ik}}\right) \\ \gamma^{\mathrm{i}}\nabla_{\mathrm{i}}\Psi + \mu\Psi = 0, \quad \left(\mu = \frac{\mathrm{mc}}{\hbar}\right) \end{cases}. \tag{4}$$

В данном случае спинорная функция $\Psi(x)$, как и метрические коэффициенты, будет зависеть только от радиальной координаты x. Здесь, как обычно, γ^i – матрицы Дирака искривленного пространства, удовлетворяющие фундаментальному условию связи пространства со спином:

$$\gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 2\, \mathrm{g_{ik}} \mathrm{I}, \tag{5}$$

где g_{ik} – метрический тензор и I – единичная матрица; $\nabla_k \Psi, \nabla_k \Psi^+$ – ковариантные производные спинорного поля:

$$\nabla_k \Psi = \frac{d\Psi}{dx^k} - \Gamma_k \Psi \tag{6}$$

$$\nabla_k \Psi^+ = \frac{d\Psi^+}{dx^k} + \Psi^+ \Gamma_k,$$

где Γ_k – коэффициент спинорной связности.

Для пространства с метрикой (1) ковариантные матрицы Дирака искривленного пространства будут иметь вид:

$$\gamma_1 = \sqrt{A}\,\tilde{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{BD + E^2}}{\sqrt{D}}\tilde{\gamma}_2 - \frac{E}{\sqrt{D}}\tilde{\gamma}_4, \quad \gamma_3 = \sqrt{C}\tilde{\gamma}_3, \quad \gamma_4 = \sqrt{D}\tilde{\gamma}_4, \tag{7}$$

$$\gamma^1 = \frac{1}{\sqrt{A}}\tilde{\gamma}_1, \quad \gamma^2 = \sqrt{\frac{D}{BD + E^2}}\tilde{\gamma}_2, \quad \gamma^3 = \frac{1}{\sqrt{C}}\tilde{\gamma}_3, \quad \gamma^4 = \frac{E\tilde{\gamma}_2}{\sqrt{D(BD + E^2)}} - \frac{\tilde{\gamma}_4}{\sqrt{D}}.$$

А коэффициенты спинорной связности получают следующие выражения:

$$\Gamma_1 = \tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_4 \frac{DE' - ED'}{4D\sqrt{\Delta}}; \quad \Gamma_2 = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{B'D + EE'}{4\sqrt{\Delta DA}} - \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{E'}{4\sqrt{DA}};$$
$$\Gamma_3 = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_3 \frac{C'}{4\sqrt{CA}}; \quad \Gamma_4 = \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2 \frac{DE' - ED'}{4\sqrt{\Delta DA}} + \tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_4 \frac{D'}{4\sqrt{DA}}; \tag{8}$$

где $\Delta = BD + E^2$.

В результате уравнения Дирака для функций Ψ, Ψ^+ примут вид:

$$\frac{1}{\sqrt{A}}\tilde{\gamma}_1\partial_x\Psi + \frac{ED' - E'D}{4D\sqrt{A\Delta}}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_4\Psi + \left(\frac{C'}{4C\sqrt{A}} + \frac{\Delta'}{4\Delta\sqrt{A}}\right)\tilde{\gamma}_1\Psi + \mu\Psi = 0,$$
$$\frac{1}{\sqrt{A}}\partial_x\Psi^+\tilde{\gamma}_1 + \frac{E'D - ED'}{4D\sqrt{A\Delta}}\Psi^+\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_4 + \left(\frac{C'}{4C\sqrt{A}} + \frac{\Delta'}{4\Delta\sqrt{A}}\right)\Psi^+\tilde{\gamma}_1 - \mu\Psi^+ = 0. \tag{9}$$

Первые интегралы этих уравнений следующие:

$$\Psi^+\Psi = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\Delta C}}; \quad \Psi^+\gamma_3\gamma_5\Psi = \frac{s_0}{\sqrt{\Delta C}}; \tag{10}$$

здесь $\Psi^+\gamma_3\gamma_5\Psi$ – есть z-компонента вектора плотности спина спинорного поля, и ε_0, s_0 – постоянные интегрирования.

Тензор энергии – импульса такого поля в общем случае имеет вид:

$$\mathrm{T}_{ik} = \frac{\hbar c}{4}\left[\nabla_k\Psi^+\gamma_i\Psi - \Psi^+\gamma_i\nabla_k\Psi + \nabla_i\Psi^+\gamma_k\Psi - \Psi^+\gamma_k\nabla_i\Psi\right], \tag{11}$$

откуда $\mathrm{T}_\alpha^\alpha = \mathrm{T} = \mu\hbar c\Psi^+\Psi,$ то есть для безмассового поля $\mathrm{T} = 0.$

Далее с учетом уравнений спинорного поля и интегралов (10) из (11) находим компоненты тензора энергии – импульса:

$$\mathrm{T}_{11} = \varepsilon_0\hbar c\mu\frac{A}{\sqrt{C\Delta}}; \mathrm{T}_{22} = \frac{\hbar cs_0}{4}\frac{BE' - B'E}{\Delta\sqrt{AC}}; \ \mathrm{T}_{24} = \frac{\hbar cs_0}{8}\frac{B'D - BD'}{\Delta\sqrt{AC}};$$
$$\mathrm{T}_{44} = \frac{\hbar cs_0}{4}\frac{DE' - D'E}{\Delta\sqrt{AC}}; \quad \mathrm{T}_{33} = 0; \quad \mathrm{T} = \frac{\varepsilon_0\hbar c\mu}{\sqrt{C\Delta}}. \tag{12}$$

С учетом выражений (7–12) окончательно совместная система уравнений Эйнштейна и Дирака для данного поля примет вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{C'\Delta'}{4C\Delta}+\frac{E'^2+B'D'}{4\Delta}=\chi\varepsilon_0\hbar c\mu\frac{A}{\sqrt{C\Delta}} \\
-\frac{B''}{2A}+\frac{A'B'}{4A^2}-\frac{B'C'}{4AC}+\frac{B'\Delta'}{4A\Delta}+\frac{BC'\Delta'}{2AC\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{BE'-B'E}{\Delta\sqrt{AC}}-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\frac{B}{\sqrt{C\Delta}} \\
-\frac{C''}{2A}+\frac{A'C'}{4A^2}+\frac{C'^2}{4AC}-\frac{C'\Delta'}{4A\Delta}=-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\sqrt{\frac{C}{\Delta}} \\
-\frac{E''}{2A}+\frac{E'A'}{4A^2}-\frac{E'C'}{4AC}+\frac{E'\Delta'}{4A\Delta}+\frac{E'C'\Delta'}{2AC\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{8}\frac{B'D-BD'}{\Delta\sqrt{AC}}-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\frac{E}{\sqrt{C\Delta}} \\
\frac{D''}{2A}-\frac{A'D'}{4A^2}+\frac{D'C'}{4AC}-\frac{D'\Delta'}{4A\Delta}-\frac{DC'\Delta'}{2AC\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{DE'-D'E}{\Delta\sqrt{AC}}+\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\frac{D}{\sqrt{C\Delta}}
\end{gathered}
\qquad (13)
$$

Переходим к изотермическим координатам (A=C), так как при этом компоненты тензора кривизны имеют более простой вид. Используя формулы (12), находим компоненты тензора энергии – импульса спинорного поля для рассматриваемого случая:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{T}_{11}=\varepsilon_0\hbar c\mu\sqrt{\frac{A}{\Delta}};\ \mathrm{T}_{22}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{BE'-B'E}{A\Delta};\ \mathrm{T}_{24}=\frac{\hbar cs_0}{8}\frac{B'D-BD'}{A\Delta}; \\
\mathrm{T}_{44}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{DE'-D'E}{A\Delta};\quad \mathrm{T}_{33}=0;\quad \mathrm{T}=\frac{\varepsilon_0\hbar c\mu}{\sqrt{A\Delta}}.
\end{gathered}
\qquad (14)
$$

Тогда уравнения Эйнштейна будут выглядеть так:

$$
\begin{gathered}
\frac{A'\Delta'}{4A^2\Delta}+\frac{E'^2+B'D'}{4A\Delta}=\chi\varepsilon_0\hbar c\mu\sqrt{\frac{A}{\Delta}} \\
-\frac{B''}{2B}+\frac{B'\Delta'}{4A\Delta}+\frac{A'\Delta'}{2A\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{BE'-B'E}{B\Delta}-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\sqrt{\frac{A}{\Delta}} \\
-\frac{A''}{2A}+\frac{A'^2}{2A^2}-\frac{A'\Delta'}{4A\Delta}=-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\sqrt{\frac{A}{\Delta}} \\
-\frac{E''}{2A}+\frac{E'\Delta'}{4A\Delta}+\frac{A'\Delta'}{2A\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{8}\frac{B'D-BD'}{E\Delta}-\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\sqrt{\frac{A}{\Delta}} \\
\frac{D''}{2A}-\frac{D'\Delta'}{4A\Delta}-\frac{A'\Delta'}{2AC\Delta}=\frac{\hbar cs_0}{4}\frac{DE'-D'E}{D\Delta}+\frac{\chi\varepsilon_0\hbar c\mu}{2}\sqrt{\frac{A}{\Delta}}
\end{gathered}
\qquad (15)
$$

Для более ясного физического осмысления полученной системы уравнений найдем метрические коэффициенты γ_{ik} эффективного пространственно-подобного сечения по формуле [3]:

$$\gamma_{ik}=g_{ik}+\tau_i\tau_k;\quad \tau^i\gamma_{ik}=0;\quad \tau^i\tau_i=-1. \qquad (16)$$

Тогда метрика dl^2 этого трехмерного пространства будет иметь вид:

$$dl^2=Adx^2+Rd\alpha^2+Cdz^2, \qquad (17)$$

где метрический коэффициент $R(x)$ при угловой части в (17) равен $R = \frac{\Delta}{D}$. Этот коэффициент определяет длину окружности в плоскости (x,α) с центром на оси симметрии и пропорционален расстоянию до этой оси.

Из рассматриваемой системы уравнений (15) можно получить уравнение для этого коэффициента $R(x)$:

$$\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{2R^2} + \frac{R'D'}{2RD} = 4A\omega^2 - 2A\chi\omega^3 S_3 + \varepsilon_0 \chi\hbar c\mu\sqrt{\frac{A}{RD}}\,. \qquad (18)$$

Здесь ω^3 – есть z-компонента вектора ω^k, а S_3 – z-компонента вектора плотности потока спина $S_k = \frac{\hbar c}{2}\left(\Psi^+\gamma_k\gamma_5\Psi\right)$. Так что второе слагаемое в правой части (18) $2A\chi\omega^3 S_3$ определяет взаимодействие вихря гравитационного поля ω^k и собственного момента импульса (спина) спинорного поля S_k. Кроме того, в отсутствие материи (спинорного поля) уравнение (18) для функции $R(x)$ будет иметь вид:

$$\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{2R^2} + \frac{R'D'}{2RD} = 4A\omega^2. \qquad (19)$$

Но поскольку выражение $4A\omega^2$ при $\omega \neq 0$ всегда положительно, то при $R' = 0$ (в точке экстремума функции $R(x)$) R'' будет больше нуля, а это есть необходимое условие существования «кротовой норы». Следовательно, вихревое гравитационное поле может образовывать «кротовые норы», источником которого, как мы показали выше, может являться спинорное поле с поляризованным спином.

Полученное ниже решение совместной системы уравнений гравитационного и спинорного полей (1) для метрических коэффициентов рассматриваемого пространства – времени иллюстрирует такую возможность. Для случая безмассового спинорного поля $\mu = 0$, например, нейтрино, оно имеет вид:

$$A = \frac{C_3}{\sqrt{x}}; \quad D = C_2 x + C_1 \frac{M}{\chi\hbar c s_0}\left(\frac{M}{2}x\right)^{1+\frac{\chi\hbar c s_0}{M}};$$
$$R = \frac{M}{2}\frac{x}{C_2 + \frac{C_1 M}{\chi\hbar c s_0}\left(\frac{M}{2}x\right)^{\frac{\chi\hbar c s_0}{M}}} \quad (0 \le x < \infty). \qquad (20)$$

Здесь M, C_1, C_2, C_3 – постоянные интегрирования, а s_0 – граничное значение плотности потока спина в точке, где $\sqrt{-g} = 1$.

Выбором констант интегрирования C_1, C_2 из общего решения (20) можно получить решение, соответствующее геометрии «кротовой норы». Для этого случая $R(x)$ будет иметь вид:

$$R = \frac{\frac{M}{2}x}{\frac{M}{\chi\hbar c s_0}\left(\frac{M}{2}x\right)^{\frac{\hbar\chi c s_0}{M}} - 1}, \quad x_0 \le x < \infty, \quad x_0 > 0, \qquad (21)$$

и x_0 – корень уравнения $\frac{M}{\chi \hbar c s_0}\left(\frac{M}{2}x\right)^{\frac{\hbar \chi c s_0}{M}} - 1 = 0$.

При этом $R \to \infty$ при $x \to \infty$ и $x \to x_0$ и нигде в нуль не обращается во всей области изменения радиальной переменной x. А такая ситуация для метрического коэффициента при угловой части метрики как раз соответствует геометрии «кротовой норы».

Приведенный пример показывает, что действительно возможна физическая ситуация, когда самогравитирующее спинорное поле с поляризованным спином, индуцируя появление вихревого гравитационного поля, может образовать «кротовую нору».

До сих пор в качестве теоретического источника образования «кротовых нор» использовалась материя с отрицательным кинетическим членом, что не физично. Здесь мы нашли еще один более реалистичный способ образования «кротовых нор» – с помощью гравитирующего спинорного поля.

Для пространства – времени, описываемого метрикой (1), где наличествует стационарное вихревое гравитационное поле, существует решение и вакуумных уравнений Эйнштейна $(R_{ik} = 0)$, то есть без материи, описывающее геометрию «кротовой норы». Оно имеет вид:

$$A = \left(1 + \frac{r}{r^2 + 4}\right)^2 e^{\frac{3}{8}M\left(r + \sqrt{r^2 + 4}\right)}; \quad \omega = \frac{\omega_0}{2D\sqrt{A}};$$

$$D = \omega_0\left(r + \sqrt{r^2 + 4}\right)e^{\frac{M}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + 4}\right)}; \tag{22}$$

$$R = \frac{2}{\omega_0}\frac{e^{\frac{M}{2}\left(r + \sqrt{r^2 + 4}\right)}}{r + \sqrt{r^2 + 4}}; \quad (-\infty < r < \infty),$$

где M, ω_0 – постоянные интегрирования. Из приведенного решения видно, что угловой метрический коэффициент $R(x)$ нигде в нуль не обращается во всей области изменения радиальной переменной $r(-\infty < r < \infty)$, и $R \to \infty$ при $r \to \pm\infty$, что соответствует геометрии «кротовой норы».

Таким образом, получается, что пустое стационарное пространство – время, в котором существует «априори» стационарное вихревое гравитационное поле, может иметь геометрию «кротовой норы».

Этот факт позволяет выдвинуть гипотезу, что, возможно, во Вселенной существуют подобные «кротовые норы» без материи, то есть пустые со свободным пространством, готовые служить для дальних космических путешествий. А вдруг вся Вселенная пронизана такими готовыми «кротовыми норами», как головка сыра? Остается только их найти.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации [Текст] / В.Ю. Владимиров. – М. : Энергоиздат, 1982
2. Кречет, В.Г. Топологические и физические эффекты вращения и спина в общерелятивистской теории гравитации [Текст] / В.Г.Кречет // Известия вузов. Физика. – 2007. – № 10. – С. 57–60.
3. Krechet V.G. Sadovnikov D.V. Effects of spin-spin interaction in general-relativistic theory of gravity // Gravitation and Cosmology – 2009 – vol. 60. – № 4.