УДК 539.1

А.С. Киселев, В.Г. Кречет

Космологическая проблема в пятимерном пространстве Римана – Вейля с идеальной жидкостью

В данной работе получен ряд космологических решений в рамках обобщенной теории Калуцы – Клейна для случая пятимерного пространства Римана – Вейля. Материя представлялась в виде идеальной жидкости, индуцирующей неметричность пространства – времени. Показано, что такая теория дает вполне адекватное описание современного этапа эволюции Метагалактики.

Ключевые слова: пятимерная космология, эволюция Вселенной, теория Калуцы – Клейна, пространства с неметричностью.

A.S. Kiseliov, V.G. Krechet

A Cosmological Problem in Five- Dimensional Space of Riemann – Weyl with Perfect Liquid

In the framework of Kalutsy – Klein theory which generalized to the case of the five-dimensional space a number of cosmological solutions have been obtained. The matter is in the form of the perfect fluid, which induces nonmetricity space-time. It is shown that such a theory gives a realistic description of the present stage of evolution of the meta-galaxy.

Key words: five- dimensional cosmology, evolution of the Universe, the Theory of Kalutsy-Klein, nonmetric space .

Теория Калуцы – Клейна обобщается путем ее рассмотрения в пятимерном пространстве – времени Римана – Вейля с неметричностью **Ошибка! Закладка не определена.** $\nabla_A g_{BC} = 2W_A g_{BC}$ $(A, B, C = 0,1,2,3,4)$. Гравитационный лагранжиан теории принимает вид:

$$L_g = -\tfrac{1}{2\chi}\left(R(\Gamma) + \alpha W_A W^A + \beta \Omega_{AB}\Omega^{AB}\right), \qquad (1)$$

где (без учета дивергентных членов):

$$R(\Gamma) = R(\{\}) - 12 W_A W^A,$$

Ω_{AB} есть сегментарная кривизна, определяемая

$$\Omega_{AB} = R^C{}_{CAB} = 10 W_{[A,B]},$$

где R^A_{BCD} – тензор Римана, а вектор Вейля примет вид:

$$W_A = \frac{5}{12} k \rho U_A \chi .$$

Здесь χ – эйнштейновская гравитационная постоянная, k – лагранжев множитель, обеспечивающий выполнение закона сохранения массы, ρ – плотность массы, U^A – скорость, так что ρU^A – плотность потока массы.

Также учитывается условие цилиндричности по пятой координате x^4.

В данной работе рассматриваются приложения такого обобщения теории Калуцы – Клейна к космологическим проблемам. Исследуется пятимерная однородная изотропная модель, описываемая плоской метрикой:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + b(t)(dx^4)^2 \qquad (2)$$

Здесь масштабный фактор $b(t)$ при дополнительной координате x^4 определяет наличие геометрического безмассового скалярного поля. Кроме того, если вектор Вейля считать градиентным $W_i = \dot{\psi}$, где ψ – потенциал для W_i, то в данной задаче получается уже два геометрических скалярных поля: $b(t)$ и $\psi(t)$. Материю, заполняющую Вселенную, представим в виде идеальной жидкости.

Уравнения, определяющие эволюцию данной модели, следующие:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{12-\alpha}{2}\dot{\psi}^2 + \chi\varepsilon + \Lambda,$$

$$\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} = -\frac{12-\alpha}{2}\dot{\psi}^2 - \chi p + \Lambda, \qquad (3)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{12-\alpha}{2}\dot{\psi}^2 - \chi p + \Lambda,$$

$$\ddot{\psi} + \dot{\psi}\left(\frac{3\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}\right) = \frac{5\chi}{12-\alpha}\left(p+\varepsilon\right).$$

Здесь p – давление, ε – плотность энергии, α – константа.

Видно, что при уравнении состояния вакуума $\left(p+\varepsilon=0\right)$ правая часть последнего уравнения системы (3) обращается в нуль, то есть вакуумная материя не обладает скалярным зарядом и не может являться источником неметричности.

Из системы (3), дифференцируя первое уравнение и исключая с помощью других вторые производные, можно получить локальный закон сохранения энергии, который в нашем случае примет вид:

$$\dot{\varepsilon} + \left(p+\varepsilon\right)\left(\frac{3\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + 5\dot{\psi}\right) = 0. \qquad (4)$$

Далее из второго и третьего уравнений системы легко вывести соотношение:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}\right)\frac{a^3}{b} = const$$

Если положить в этом соотношении константу интегрирования равной нулю, то получим, что $a(t) = b(t)$, то есть пространство – время изотропно по всем четырем пространственным измерениям.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда в данной модели, кроме геометрических скалярных полей $b(t)$ и $\psi(t)$, присутствует лишь космологический член Λ, описывающий «темную энергию» и соответствующий идеальной жидкости с вакуумным уравнением состояния $p+\varepsilon=0$. Тогда уравнение (4) выполняется тождественно. Общее решение системы (3) в этом случае примет вид:

$$a^4 = \frac{c_1^4 e^{kt} - c_2 e^{-kt}}{2kc_1^2}, \text{ где } k = \frac{7}{3}\Lambda,\ c_1, c_2 = const \tag{5}$$

Более конкретный вид решений будет зависеть от константы интегрирования c_2:

$$a)\ c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt[4]{2k}} e^{\frac{kt}{4}}$$

$$b)\ c_2 > 0\ \ и\ пусть\ c_2 = c_1^4 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt[4]{\frac{c_1^2}{k} sh(kt)} \tag{6}$$

$$c)\ c_2 < 0\ \ и\ пусть\ c_2 = -c_1^4 \quad \Rightarrow \quad a(t) = \sqrt[4]{\frac{c_1^2}{k} ch(kt)}$$

Видно, что в случаях (6a) и (6c) получаются решения, в которых отсутствует сингулярность в начальный момент времени.

Далее будем рассматривать космологическую модель (2) уже при наличии идеальной жидкости с баротропным уравнением состояния $p = k\varepsilon \ \left(k = const\ ,\ 0 \le k \le 1\right)$.

Здесь так же положим, что $a(t) = b(t)$, кроме того, для удобства сделаем замену переменной $\psi = \ln\varphi$, так что $\dot{\psi} = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}$ и $\ddot{\psi} = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} - \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2}$, переобозначим $\chi\varepsilon \to \varepsilon$ и зададим константу $\alpha = -\frac{27}{16}$. Окончательно получим единственное уравнение, описывающее данную космологическую модель:

$$2\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta}\right)^{\bullet} + \frac{\dot{\beta}^2}{\beta^2} = \frac{8\varepsilon_0}{3\beta^{k+1}} + \frac{8}{3}\Lambda \tag{7}$$

Здесь $\beta = a^4\varphi^5$, а $\varepsilon_0 = const$ – соответствует плотности энергии в начальный момент времени.

Далее рассмотрим полученные результаты применительно к конкретным уравнениям состояния материи.

В случае предельно жесткого уравнения состояния $(p = \varepsilon)$ имеем следующее общее решение:

$$a(t) = \left(\frac{8\varepsilon_0}{3m^2}\right)^{\frac{1}{8}} sh^{\frac{1}{4}}(\lambda t)$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{m}{\lambda}\right)^{\frac{1}{5}} \left(\frac{ch(\lambda t)}{sh(\lambda t)}\right)^{\frac{1}{5}} \tag{8}$$

Здесь и далее $m = const$, $\lambda = \sqrt{\frac{8}{3}\Lambda}$.

Как можно видеть, в этом решении присутствует начальная сингулярность, а первоначальный фридмановский режим эволюции $\left(a(t) \sim \mathrm{t}^{\frac{1}{4}} \right)$ сменяется на более поздних этапах экспоненциальным $\left(a(t) \sim \mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}} \right)$, соответствующим современной инфляции, то есть полученная модель вполне реалистична и согласуется с существующей принятой моделью.

Далее рассмотрим уравнение состояния излучения $\left(p = \dfrac{\varepsilon}{3} \right)$. В этом случае имеем:

$$a(t) = \left(\frac{192\varepsilon_0^3}{m^4 \Lambda} \right)^{\frac{1}{16}} sh^{\frac{1}{4}}(\lambda t) ch^{\frac{1}{8}}(\lambda t) \tag{9}$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{3m^2}{8\Lambda} \right)^{\frac{1}{10}} \left(\frac{ch(\lambda t)}{sh(\lambda t)} \right)^{\frac{1}{5}}$$

Тут, как и в предыдущем случае, имеется сингулярность в начальный момент времени, и на современном этапе расширение идет экспоненциально.

Теперь рассмотрим пылевидное уравнение состояния материи $(p = 0)$. В этом случае уравнение (7) не интегрируется в элементарных функциях, поэтому рассмотрим асимптотические решения: 1) $\beta(t) << 1$ и 2) $\beta(t) >> 1$.

В первом случае (при $\beta(t) << 1$) получаем:

$$a(t) = \left(\frac{l - \frac{8}{3}\varepsilon_0}{2m} t + \frac{c_1 \sqrt{l - \frac{8}{3}\varepsilon_0}}{m} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{m}{2} t + \frac{mc_1}{\sqrt{l - \frac{8}{3}\varepsilon_0}} \right)^{\frac{1}{5}} \tag{10}$$

где $l = const$, причем $l - \frac{8}{3}\varepsilon_0 \neq 0$.

Из этого решения видно, что расширение на данном этапе идет замедленно $\left(a(t) \sim \mathrm{t}^{\frac{1}{4}} \right)$.

Во втором случае, когда $\beta(t) >> 1$, общие решения запишутся следующим образом:

$$a(t) = \left(\frac{8c_1^2 \Lambda}{3m^2} \right)^{\frac{1}{8}} e^{t\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}} \tag{11}$$

$$\varphi(t) = \left(\frac{3m^2}{8\Lambda} \right)^{\frac{1}{10}}$$

Здесь видно, что расширение идет экспоненциально, что соответствует инфляционной фазе эволюции Вселенной, а геометрическое скалярное поле φ на этом этапе является постоянным во времени, то есть обобщение теории Калуцы – Клейна на пространства с неметричностью Вейля дает, применительно к космологии, вполне реалистичные результаты, согласующиеся с современными данными наблюдений принятыми моделями.

Библиографический список

1. Владимиров, Ю.С. Пространство – время – явные и скрытые размерности [Текст] / Ю.С. Владимиров. – М. : УРСС, 2009. – 191 с.

2. Krechet V.G. Geometrization of physical interaction, 5-dimensional theories and the many world problem. // Gravitation and Cosmology, 1995. v.1.