

Н.И. Перов, А.В. Кондратьева

Небесномеханическая модель образования незамкнутых колец вблизи планет-гигантов*Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы» (государственный контракт № П539).*

Рассматривается ограниченная задача 4-х тел. Массы основных 3-х тел, расположенных в вершинах правильного треугольника, являются произвольными, но массы двух тел равны. Динамическая система основных тел равномерно вращается с постоянной угловой скоростью. Четвертое – малое тело – в начальный момент времени находится в *неустойчивой* (по определению Ляпунова) точке либрации. Определяются условия, при которых движение тела с нулевой массой во вращающейся системе координат происходит по одной и той же гладкой замкнутой кривой, имеющей вид двойной арки (двух дуг), в *ограниченной* области пространства. Рассмотренную модель движения пробной частицы предлагается использовать для описания особенностей строения кольцевых структур планет-гигантов.

Ключевые слова: небесная механика, задача N тел, центральные конфигурации, точки либрации, устойчивость движения, кольца планет, коорбитальные спутники.

N.I. Perov, A.V. Kondratieva

A Celestial Mechanical Model of Unclosed Rings' Formation near Giant-Planets

The restricted 4-body problem is under consideration. Mass of the major 3 bodies, placed in the vertexes of regular triangular, is arbitrary, but mass of the two bodies are equal. The dynamical system of the major bodies uniformly rotates with a constant angular velocity. The 4-th small body in the initial moment of time is placed in the *non-stable* (in the sense of Lyapunov) point of libration. The conditions, for which the body with negligible mass moves along one and the same smooth curve (like double arc) in the *restricted* region of space, are determined. The considered model is used for the description of peculiarities of the giant-planets' rings.

Key words: celestial mechanics, N -body problem, central configurations, libration points, stability of the motion, planetary rings, co-orbital satellites.

Введение

В XX столетии кольца, состоящие из каменисто-ледяных малых тел диаметром меньше 10 м и пыли, были обнаружены около всех планет-гигантов. Также из наблюдений установлено существование незамкнутых колец (дуг, арок) вблизи этих планет [8]. Простые аналитические модели движения подобных небесномеханических систем не найдены [1, 2]. Авторы работ [4] и [7] предлагают использовать различные модели центральных конфигураций для удовлетворительного описания данных динамических систем.

Ниже рассматривается движение тела с незначительной (нулевой) массой m_0 , помещенной в начальный момент времени около точки либрации L . Точка L расположена на прямой «центр масс системы – вершина правильного треугольника» (в работе [5] нами было рассмотрено движение вблизи «противоположной» точки либрации, лежащей на прямой «центр масс системы – середина стороны треугольника»). Цель настоящей работы – поиск во вращающейся системе координат гладких замкнутых кривых *простого* вида, которые представляют собой периодические *упорядоченные* (не хаотические) траектории движения тела с нулевой массой m_0 .

Основные уравнения

Рассмотрим центральную конфигурацию четырех тел: планета с массой m_1 , два ее коорбитальных спутника массами m_2 и m_3 ($m_2=m_3$) (тела расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной a) и частица с нулевой массой m_0 , в начальный момент времени находящаяся в точке либрации L на прямой, соединяющей центр масс системы и тело m_1 . Тела с массами m_1 , m_2 , m_3 равномерно вращаются относительно центра масс системы (C) с угловой скоростью ω (рис. 1).

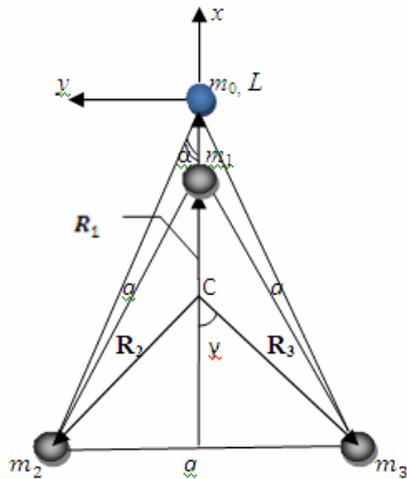


Рис. 1. Система четырех тел: планета m_1 , два коорбитальных спутника m_2 и m_3 , частица m_0 (в начальный момент времени точка m_0 совпадает с точкой либрации L). C – центр масс системы

На рисунке 1 R_1, R_2, R_3 – радиус-векторы рассматриваемых тел в системе центра масс; Lx и Ly – оси вращающейся с угловой скоростью ω системы координат, выбранные для исследования движения тела m_0 .

Будем учитывать только гравитационные силы, тогда, в соответствии с работой [5], имеем:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + 2m_2)}{a^3}; \quad (1)$$

$$R_1 = \frac{a\sqrt{3}m_2}{m_1 + 2m_2}; \quad (2)$$

$$R_2 = \frac{a\sqrt{m_1^2 + m_1m_2 + m_2}}{m_1 + 2m_2}; \quad (3)$$

Уравнение движения тела m_0 , помещенного в точку либрации L , в инерциальной системе координат с началом в точке (C) имеет следующий вид:

$$d^2 \mathbf{R}/dt^2 = - \frac{Gm_1}{(R - R_1)^2 R} \mathbf{R} - \frac{2Gm_2}{(R^2 + R_2^2 + 2R_2R \cos \gamma)} \cos \alpha \mathbf{R}; \quad (4)$$

Для центральной конфигурации [7]:

$$d^2 \mathbf{R}/dt^2 = -\omega^2 \mathbf{R} \quad (5)$$

Кроме того, (рис. 1)

$$\cos \gamma = \frac{m_1 R_1}{2m_2 R_2}; \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \frac{R - R_1 + a\sqrt{3}/2}{(R^2 + R_2^2 + 2RR_2 \cos \gamma)^{1/2}}. \quad (7)$$

Здесь ω – угловая скорость тел m_1, m_2, m_3 ; R_1, R_2, R_3 – расстояния до планеты и двух спутников от центра масс системы; G – гравитационная константа; \mathbf{R} – вектор, определяющий положение тела массы m_0 относительно точки C без учета возмущений (тело m_0 находится в точке либрации L).

Решая систему уравнений (1)–(7), можно найти \mathbf{R} для известных значений $m_1, m_2=m_3$ и a в случае невозмущенного движения.

В случае возмущенного движения тела с нулевой массой m_0 в произвольной окрестности точки либрации L запишем соответствующие уравнения движения в неинерциальной, равномерно вращающейся системе координат xLy в виде:

$$\ddot{x} = - \frac{Gm_1(R - R_1 + x)}{((R - R_1 + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(R + R_2 \cos \gamma + x)}{((R + R_2 \cos \gamma + x)^2 + (-R_2 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_3(R + R_3 \cos \gamma + x)}{((R + R_3 \cos \gamma + x)^2 + (R_3 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}} + 2\omega \dot{y} + \omega^2(R + x),$$

$$\ddot{y} = -\frac{Gm_1 y}{((R - R_1 + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2(-R_2 \sin \gamma + y)}{((R + R_2 \cos \gamma + x)^2 + (-R_2 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_3(R_3 \sin \gamma + y)}{((R + R_3 \cos \gamma + x)^2 + (R_3 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}} - 2\omega \dot{x} + \varpi^2 y,$$

$$\ddot{z} = -\frac{Gm_1 z}{((R - R_1 + x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_2 z}{((R + R_2 \cos \gamma + x)^2 + (-R_2 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{Gm_3 z}{((R + R_3 \cos \gamma + x)^2 + (R_3 \sin \gamma + y)^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Примеры

Полагаем, что система координат xLy равномерно вращается с угловой скоростью ω ; $m_2=m_3=1$; $G=1$; $a=1$; $x(0)=y(0)=0$; $(dx/dt)_0=(dy/dt)_0=10^{-9}$ единиц скорости; $y_2=-y_3=0,5$; интервал времени равен 20 единицам времени; x_2, y_2, x_3, y_3 – координаты тел с массами m_2, m_3 в системе xLy ; n – число оборотов основных тел за указанный интервал времени.

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (8) (при $z=0$) с помощью метода Рунге – Кутты 4-го порядка дает следующие результаты.

При отношении масс $m_1/m_2=1100$ прослеживается хаотическое движение тела m_0 (рис. 2а);

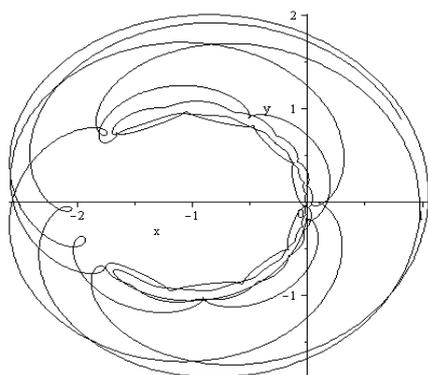


Рис. 2а.

$m_1/m_2=1100, \omega^2=1102, R/a = 1,0005993527,$
 $R_1 = 0,0015717339, R_2 = R_3 = 0,9986391476,$
 $x_2=x_3=-1,8650530225, n = 105,667376$

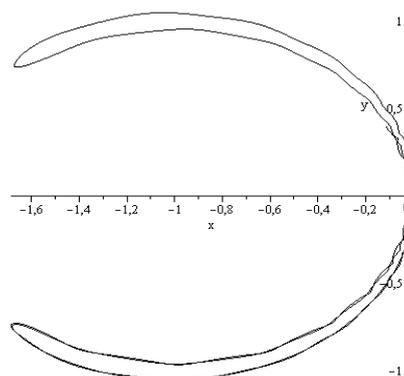


Рис. 2б.

$m_1/m_2=1500, \omega^2=1502, R/a = 1,0004397547,$
 $R_1 = 0,0011531629, R_2 = R_3 = 0,9990014979,$
 $x_2=x_3=-1,8653119955, n = 123,36304869400$

При $m_1/m_2=1500$ (рис. 2б) наблюдается «регулярное» – периодическое – движение тела с массой m_0 в заметно меньшей (по площади) области пространства, представляющей дугу кольца.

В работе Н.И. Перова и Ю.Д. Медведева [6] подчеркнута, что система, подобная рассмотренной выше центральной конфигурации 4-х тел (рис. 1), является устойчивой, по Ляпунову, при отношении масс компонентов $m_1/m_2 = m_1/m_3 > 367,0540108$. Эта величина на порядок больше по сравнению с отношением масс $m_1/m_2 \sim 27$, необходимым для устойчивости системы трех основных тел.

Замечание. В работе [4] рассматривается аналогичная конфигурация, но с бесконечно малыми массами – m_2, m_3, m_0 – по сравнению с массой m_1 . Установлено существование 7 центральных конфигураций (симметричных и несимметричных), при этом не исследуется устойчивость системы 4-х тел. В статье [3] рассмотрен пример появления *устойчивых* точек либрации в *неустойчивой* центральной конфигурации.

Заключение

Из анализа результатов работы следует: поиск незамкнутых колец (дуг, арок) с устойчивыми орбитами, расположенных вблизи планет, должен производиться при заметном различии масс планеты и ее коорбитальных спутников или «спутников-пастухов» ($m_1/m_2 > 1150$).

Библиографический список

1. Горькавый, Н.Н., Тайдакова, Т.А. Многокомпонентный эпитон и Галатея [Текст] / Н.Н. Горькавый, Т.А. Тайдакова // Письма в астрономический журнал.– 1993. – Т. 19, № 4.– С. 375–384.
2. Горькавый, Н.Н., Фридман, А.М. Физика планетных колец : Небесная механика сплошной среды [Текст] / Н.Н. Горькавый, А.М. Фридман. – М. : Наука, 1994. – 348 с.
3. Медведев, Ю.Д., Перов, Н.И. Ограниченная задача четырех тел. Случай центральной конфигурации : точки либрации, устойчивость [Текст] / Ю.Д. Медведев, Н.И. Перов // Письма в астрономический журнал РАН. – 2008. – Т. 34, № 5. – С. 392–400.
4. Corbera M., Cors J. M., Llibre J. On the central configurations of the planar 1 + 3 body problem / *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2011. V. 109. N. 1. P. 27–43.
5. Perov N. I., Kondratieva A. V. Localization of boundaries of life of the Earth's type in the star clusters / *Abstr. of the 41-st Lunar- Planetary Science Conference (The Woodlands, Texas, USA, March 1–5, 2010)*. Abstract #1028.
6. Perov N.I., Medvedev Yu.D. Central configurations of N bodies as models of secondary coorbital planets and planetary rings *Abstr. of the 39-th Lunar- Planetary Science Conference (Houston, USA, March, 2008)*. Houston: LPI, 2008. Abstr. N 1029.
7. Winter A. *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Princeton. New York, 1941.
8. Planetary Fact Sheets [Электронный ресурс]. URL : <http://nssdc.gsfc.ov/planetary/factsheet> (дата обращения 22.04.2011).